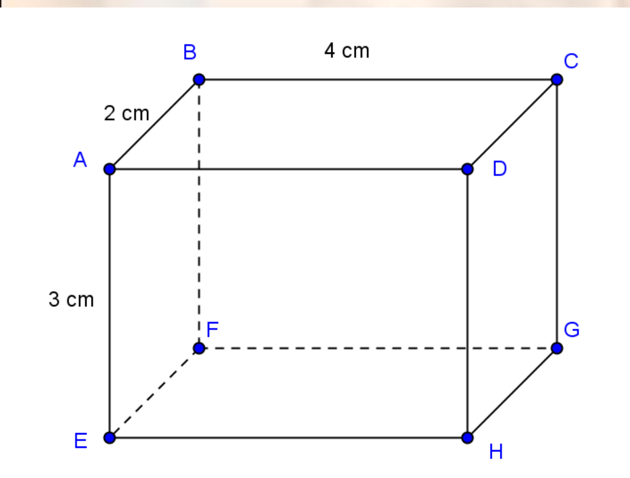
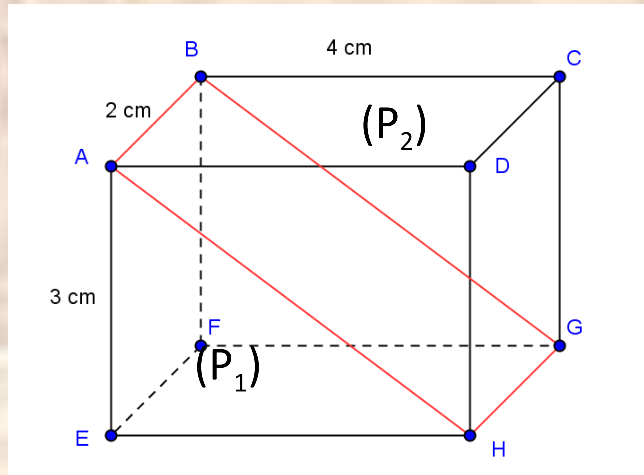
Exercices de géométrie dans l’espace

Exercice 1

On considère un parallélépipède rectangle ABCDEFGH tel que AB = 2 cm, BF = 3 cm et AD = 4 cm. En sectionnant ce parallélépipède selon le plan ABGH on obtient alors deux prismes (P_1) et (P_2) identiques.

1. Dessiner un patron d'un des deux prismes (P_1) ou (P_2).

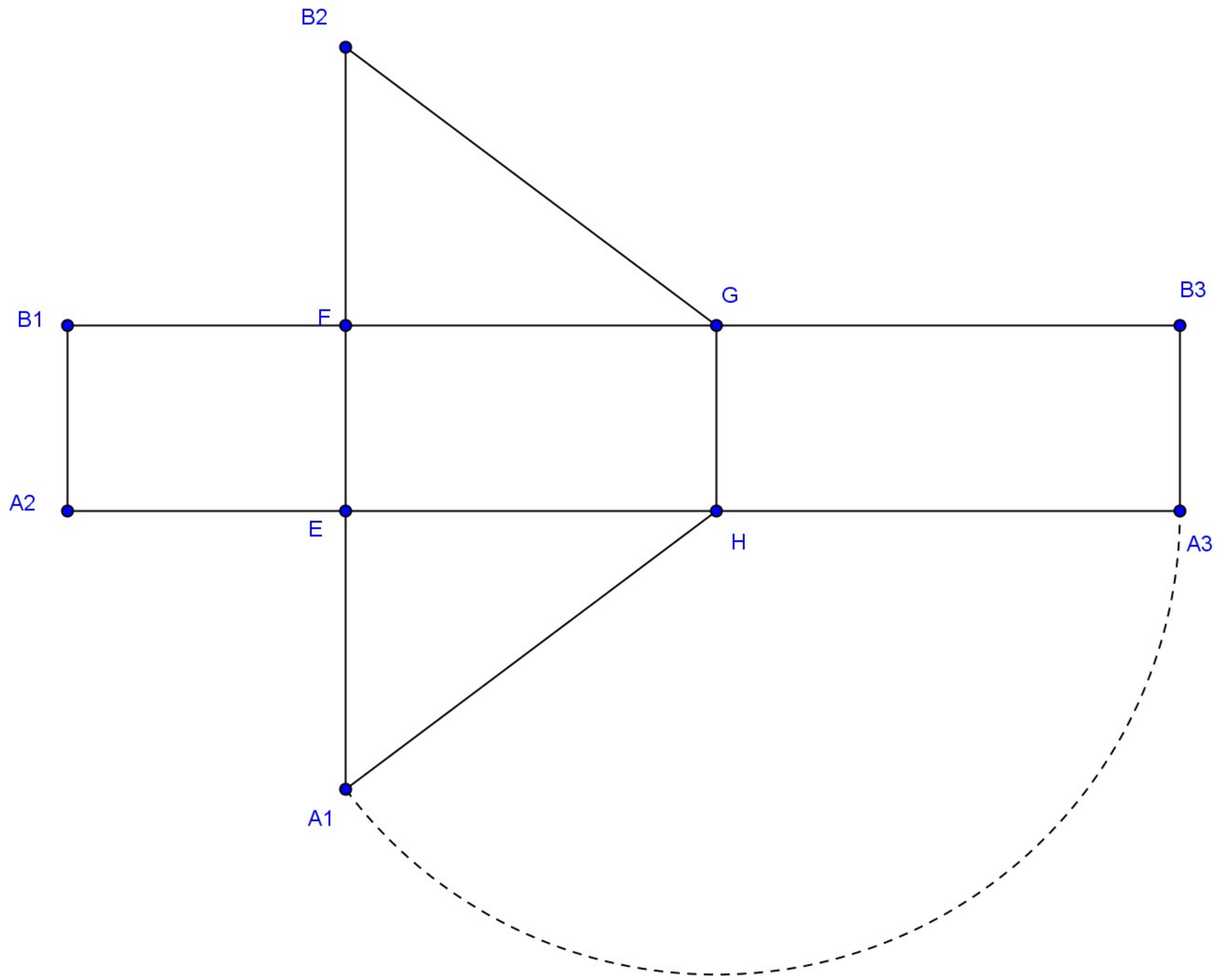




Liste des cinq faces du prisme P_1 :

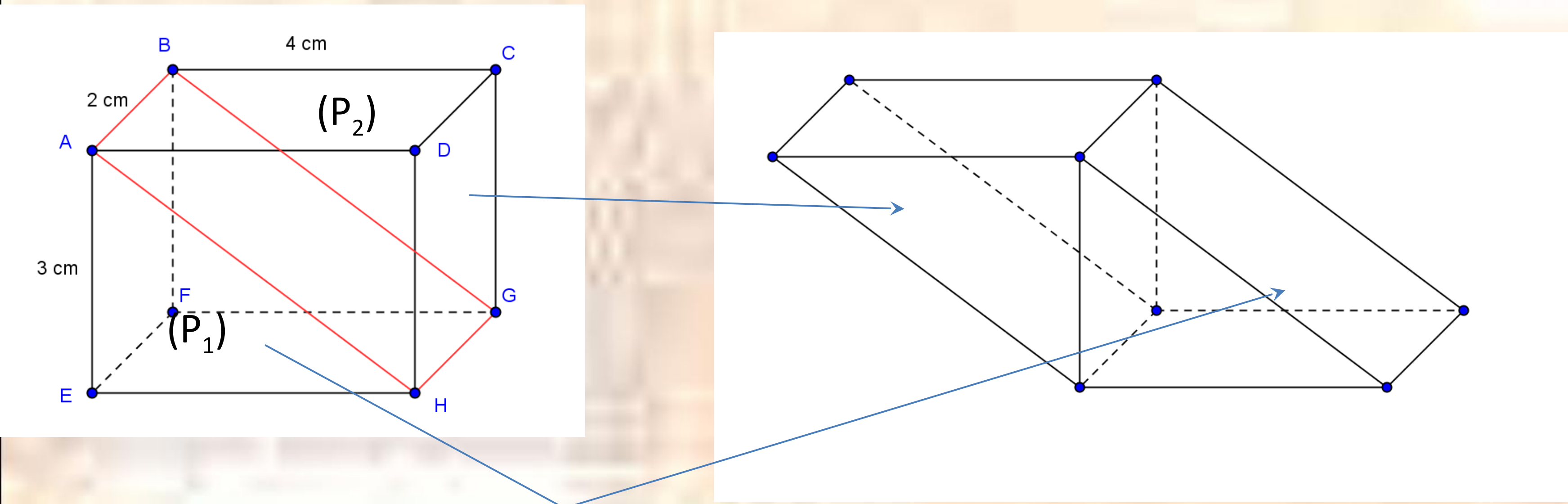
ABFE rectangle de dimensions 2 cm et 3 cm
EFGH rectangle de dimensions 2 cm et 4 cm
AEH triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 3 cm et 4 cm
BFG triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 3 cm et 4 cm
ABGH rectangle de dimensions 2cm et 5cm (d'après le théorème de Pythagore)

Patron du prisme (P_1):



2. On obtient un nouveau solide (S) en collant les faces ABFE et DCGH des deux prismes (P_1) et (P_2).

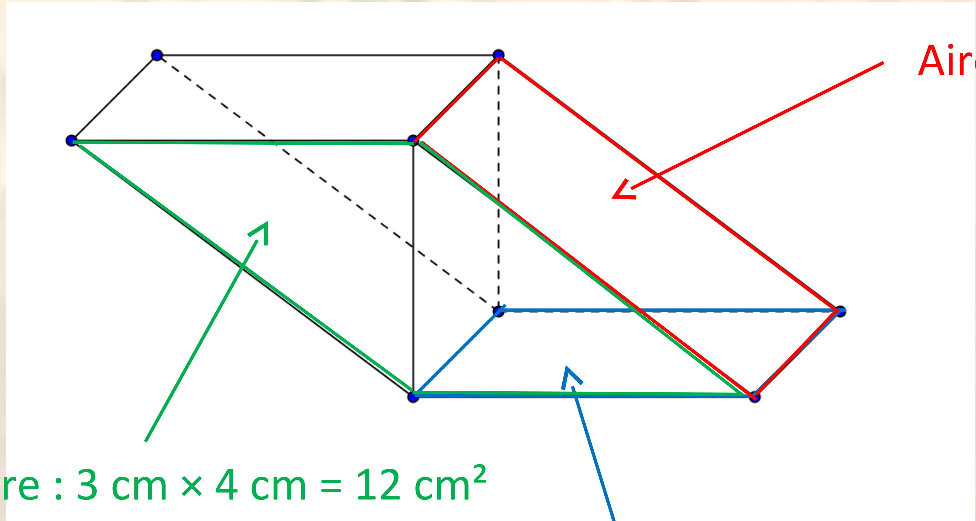
a) Quelle est la nature des faces du solide (S) ?



(S) est un parallélépipède droit (cas particulier de prisme droit) dont les six faces sont :

- deux parallélogrammes (dont les côtés mesurent 4cm et 5 cm et dont une diagonale mesure 3cm)
- quatre rectangles (deux rectangles de dimensions 2cm et 4 cm et deux rectangles de dimensions 2cm et 5 cm)

b) Quelle est l’aire des faces du solide (S) ?



Aire totale des faces du solide (S) : $2 \times (8 + 10 + 12) = 60$ (en cm²)

c) Quel est le volume du solide (S) ?

Volume du solide (S) : $12\ \text{cm}^2 \times 2\ \text{cm} = 24\ \text{cm}^3$

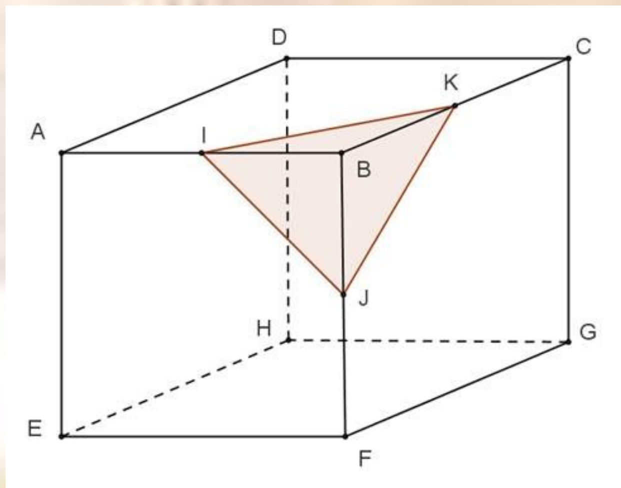
Exercice 2

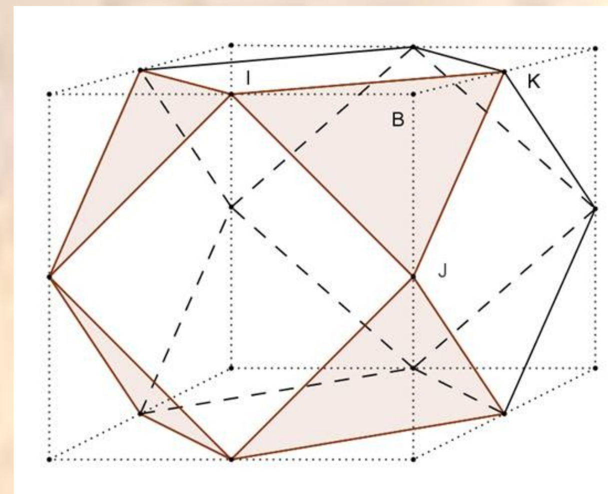
On considère un cube ABCDEFGH d'arête 10 cm.

I, J et K sont les milieux des arêtes [AB], [BF] et [BC] respectivement.

À partir des 8 sommets du cube on peut former 8 pyramides identiques à la pyramide IJKB. En enlevant ces 8 pyramides au cube on obtient un *cuboctaèdre*.

1. Décrire le cuboctaèdre obtenu à partir du cube ABDCDEFGH (nombre et nature des faces) et calculer ses arêtes au cm près.





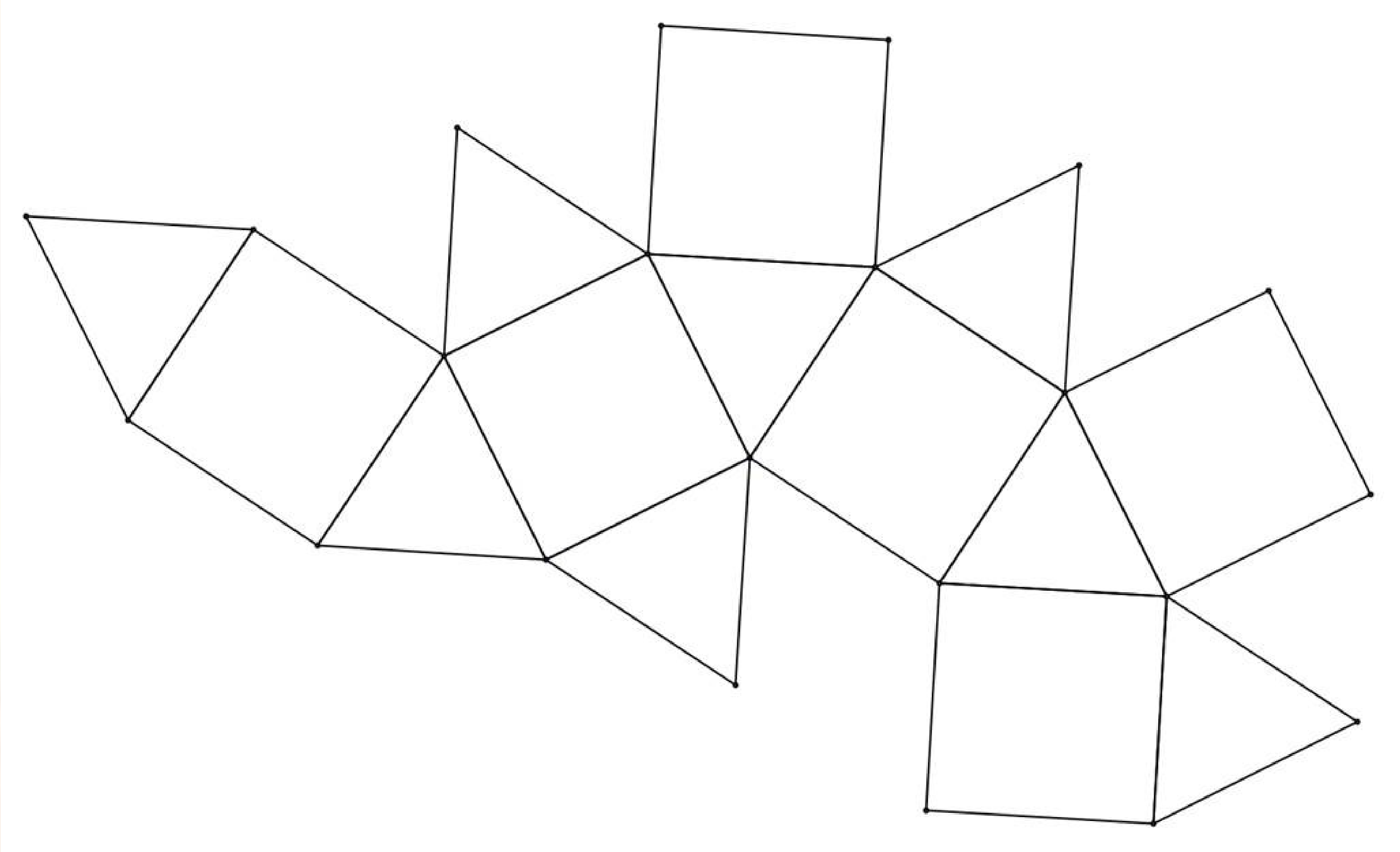
Le cuboctaèdre a 14 faces : 6 faces sont des carrés et 8 faces sont des triangles équilatéraux.

Toutes les arêtes ont même longueur que [IJ].

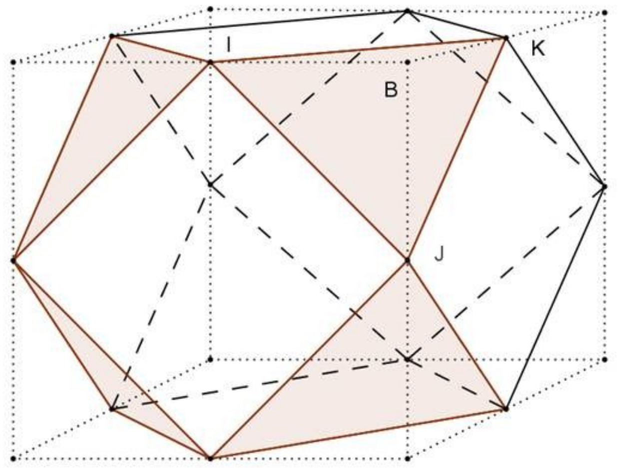
Et, d'après le théorème de Pythagore : $IJ^2 = IB^2+BJ^2 = 5^2+5^2 = 50$

Donc $IJ = \sqrt{50} = \sqrt{25\times 2} = 5\sqrt{2} \approx 7$ (en cm)

2. Dessiner un patron du cuboctaèdre.



3. Calculer l'aire totale des faces du cuboctaèdre.



$$A_{\text{cuboctaèdre}} = 6 \times A_{\text{carré}} + 8 \times A_{\text{triangle}} = 6(5\sqrt{2})^2 + 8\times \frac{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\times 5\sqrt{2}\right]\times 5\sqrt{2}}{2} = 300 + 100\sqrt{3}$$ (en cm²)

4 Calculer le volume du cuboctaèdre.

$$V_{\text{cubocatèdre}} = V_{\text{cube}} - 8V_{IJKD} = 10^3 - 8\times \frac{1}{3}\left(\frac{5\times 5}{2}\right)\times 5 = \frac{2500}{3}$$ (en cm³)