Calculs et opérations

I Différents types de calcul

Remarque préalable : calculer nécessite la mémorisation de résultats et de techniques.

	Calcul automatisé : ayant à faire un certain type de calcul, on utilise toujours la même procédure quels que soient les nombres en jeu.	**Calcul réfléchi** : ayant à faire un certain type de calcul, on utilise une procédure dépendant des nombres en jeu.
Calcul écrit	Exemple : ayant à faire une soustraction, on utilise toujours la même technique de calcul posé.	Exemples : 64 - 5 = 64 - 4 - 1 = 60 - 1 = 59 64 - 59 = 64 - 60 + 1 = 5
Calcul mental	Exemple : ayant à diviser par 25, mentalement, on multiplie par 4 et on divise par 100.	Exemple : 12×25 = 3×4 ×25 = 3×100 = 300
Calcul instrumenté (on utilise une calculatrice ou un tableur)	Exemple : ayant à calculer le produit de deux nombres, on utilise la touche × de la calculatrice.	Exemple : pour calculer la valeur exacte de 128 000 618 × 514 avec une calculatrice, on effectue à la calculatrice les calculs 128 × 514 et 618 x 514.

II Quelques propriétés des opérations

1°) 0 est élément neutre pour l'addition : Pour tout nombre a, $a + 0 = a$ et $0 + a = a$

2°) L'addition est commutative : Pour tout nombre a et tout nombre b, $a + b = b + a$

3°) L'addition est associative :
Pour tout nombre a, tout nombre b et tout nombre c, $a + (b + c) = (a + b) + c$
Conséquence : on peut donc ne pas écrire les parenthèses.

4°) 0 est élément absorbant pour la multiplication : pour tout nombre a, $0 \times a = 0$ et $a \times 0 = 0$

5°) 1 est élément neutre pour la multiplication : pour tout nombre a, $1 \times a = a$ et $a \times 1 = a$

6°) La multiplication est commutative : Pour tout nombre a et tout nombre b, $a \times b = b \times a$

7°) La multiplication est associative :
Pour tout nombre a, tout nombre b et tout nombre c, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
Conséquence : on peut donc ne pas écrire les parenthèses

8°) La multiplication est distributive par rapport à l'addition :
Pour tout nombre a, tout nombre b et tout nombre c, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
et $(b + c) \times a = b \times a + c \times a$
Remarque : la multiplication est aussi distributive par rapport à la soustraction.

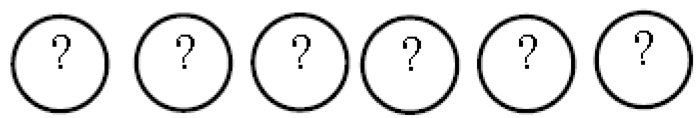
III La division euclidienne

1°) Les deux significations de la division euclidienne

Dans une situation où on fabrique des « paquets » en partageant équitablement des objets

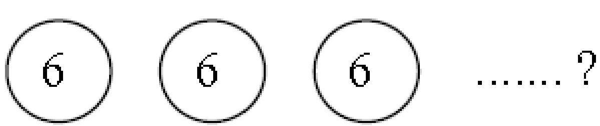
- la division peut servir à trouver combien il y a d'objets dans chaque « paquet » quand on connaît le nombre total d'objets et le nombre de « paquets » (division-partition)

On dispose de 45 bonbons à partager équitablement entre 6 enfants ? Combien chaque enfant aura-t-il de bonbons ?
Question :« Combien dans chaque « paquet » ? »



- la division peut servir à trouver le nombre de « paquets » quand on connaît le nombre total d'objets et le nombre d'objets dans chaque « paquet » (division-quotition)

On dispose de 45 bonbons. On désire fabriquer des paquets de 6 bonbons. Combien peut-on fabriquer de paquets ?
Question : « Combien de « paquets » ? »



2°) Ecritures correctes

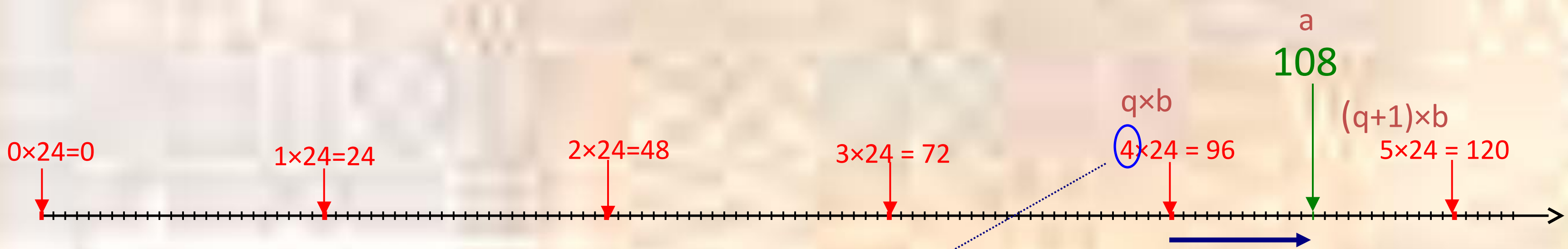
$$\begin{array}{r|l} 1\ 2\ 8 & 5 \\ \cline{2-2} 2\ 8 & 2\ 5 \\ 3 & \end{array}$$

Écritures correctes :

$128 = 25 \times 5 + 3$ $\qquad$ $\dfrac{128}{5} = 25 + \dfrac{3}{5}$ $\qquad$ voire même : $128 : 5 = 25 + (3 : 5)$

3°) Première définition possible de la division euclidienne :

Soit à effectuer la division euclidienne de 108 par 24.



r = 108 – 96 = 12

12 est le reste r dans la division de 108 par 24

4 est le quotient q dans la division euclidienne de 108 par 24

Effectuer la division euclidienne de a par b c'est trouver l'entier q (appelé quotient) et l'entier r (appelé reste) tel que :

$$qb \leq a < (q+1)b \quad \text{et} \quad r = a - qb$$

4°) Deuxième définition possible de la division euclidienne

Soit à effectuer la division euclidienne de 108 par 24.

On peut écrire de plusieurs manières 108 sous la forme 108 = …×24 + …

108 = 0 × 24 + 108

108 = 1 × 24 + 84

108 = 2 × 24 + 60

108 = 3 × 24 + 36

108 = 4 × 24 + 12

a = q × b + r

Ce nombre est plus petit que 24

4 est le quotient q dans la division euclidienne de 108 par 24

12 est le reste r dans la division de 108 par 24

Effectuer la division euclidienne de a par b c'est trouver l'entier q (appelé quotient) et l'entier r (appelé reste) tel que :

$$a = qb + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b$$

V Quelques rappels concernant les racines carrées

1°) Définition

Si $a \geq 0$, on définit $\sqrt{a}$ comme l'unique nombre x positif ou nul qui vérifie $x^2 = a$.

Remarque : il existe un autre nombre tel que $x^2 = a$. C'est le nombre $-\sqrt{a}$.

Si a est un "carré parfait" (c'est-à-dire si a est le carré d'un entier naturel) alors $\sqrt{a}$ est un entier (exemple : $\sqrt{25} = 5$)

Si a est un entier et n'est pas un "carré parfait", alors $\sqrt{a}$ est un nombre irrationnel (exemple : $\sqrt{7} \approx 2,646$)

2°) Résolution de l'équation $x^2 = a$.

Si $a < 0$, l'équation n'admet pas de solution.

Si $a = 0$, $x = 0$

Si $a > 0$, $\begin{cases} x = \sqrt{a} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{a} \end{cases}$

Exemples :

$x^2 = -3$ n'admet pas de solution.

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$x^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \text{ou} \\ x = -5 \end{cases}$

$x^2 = 13 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{13} \approx 3{,}606 \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{13} \approx -3{,}606 \end{cases}$

3°) Formulaire

a) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ Exemple : $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

b) $\sqrt{a^2} = |a|$ Exemples : $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Remarque : si on sait que $a \geq 0$ alors $\sqrt{a^2} = a$.

c) Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Exemple d'utilisation : $\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{80} =$

d) Si $a \geq 0$ et $b>0$ alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

e) Attention $\sqrt{a+b}$ N'EST PAS, en général, égal à $\sqrt{a} + \sqrt{b}$
Attention $\sqrt{a-b}$ N'EST PAS, en général, égal à $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

Attention $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$ n' est pas égal à $a+b$ mais à $a+2\sqrt{ab}+b$

Attention $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$ n' est pas égal à $a-b$ mais à $a-2\sqrt{ab}+b$

f) Construction géométrique de $\sqrt{a}$