Proposition de corrigé d'un exercice sur les nombres rationnels donné par Jacques Muller

1°) Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont des décimaux ?

$\frac{1}{7};\frac{27}{8};\frac{91}{7};\frac{42}{17}$

$\frac{1}{7}$ est une fraction irréductible et la décomposition en facteurs premiers de son dénominateur comporte un autre nombre premier que 2 et 5 donc $\frac{1}{7}$ n'est pas un nombre décimal.

$\frac{27}{8}$ est une fraction irréductible et $\frac{27}{8}=\frac{27}{2^3}$ donc $\frac{27}{8}$ est un nombre décimal car la décomposition en facteurs premiers du dénominateur 8 ne comporte que des 2.

$\frac{91}{7}=13$ donc $\frac{91}{7}$ est un nombre décimal car tout nombre entier est un nombre décimal.

$\frac{42}{17}$ est une fraction irréductible et la décomposition en facteurs premiers de son dénominateur comporte un autre nombre premier que 2 et 5 donc $\frac{42}{17}$ n'est pas un nombre décimal.

2°) Le but de cette question est d'étudier l'écriture décimale périodique de $\frac{1}{7}$.

a) Poser la division de 1 par 7. En déduire l'écriture décimale périodique de $\frac{1}{7}$.

10	7
30	0,142857
20	
60	
40	
50	
1	

Le dernier reste écrit vaut 1. Les prochains restes successifs seront donc à nouveau 3,2,6,4,5,1, etc.

Donc : $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$

b) Donner, en justifiant succinctement, la 32^e décimale du développement périodique de $\frac{1}{7}$.

Après la virgule de l'écriture décimale périodique de $\frac{1}{7}$, une suite composée de six chiffres se répète.

Or $32 = 5\times6 + 2$.

La 32^e chiffre après la virgule est donc le même que le deuxième et vaut donc 4.

3) Le but de cette question est de produire l'écriture décimale périodique de $\frac{42}{17}$. En utilisant un tableur pour effectuer la division de 42 par 17 on obtient le tableau suivant. A partir de la cellule A2, la colonne A donne les restes successifs de la division de 42 par 17. A partir de la colonne B2, la colonne B donne les quotients successifs.

	A	B
1	42	17
2	8	2
3	12	4
4	1	7
5	10	0
6	15	5
7	14	8
8	4	8
9	6	2
10	9	3
11	5	5
12	16	2
13	7	9
14	2	4
15	3	1
16	13	1
17	11	7
18	8	6
19	12	4
20	1	7
21	10	0
22	15	5
23	14	8
24	4	8

a) Donner sans justifications la 20^e décimale de l'écriture décimale de $\frac{42}{17}$.

Le premier chiffre après la virgule de l'écriture décimale de $\frac{42}{17}$ vaut 4 et se trouve dans la cellule B3.

Donc le 20^e chiffre après la virgule se trouve dans la cellule B22 et vaut 5.

b) A partir du tableau ci-contre, donner l'écriture décimale de $\frac{42}{17}$.

$$\frac{42}{17} = 2,\overline{4705882352941176}$$

(car c'est dans la cellule A18 que l'on retrouve pour la première fois un reste déjà rencontré auparavant).

c) Expliquer pourquoi on est sûr de retrouver dans la cellule A18 un reste déjà obtenu.

Quand on divise un nombre par 17, il y a, a priori 17 restes possibles (les entiers successifs de 0 à 16) mais, comme $\frac{42}{17}$ n'est pas un nombre décimal, quand on divise 42 par 17, il y a, a priori, seulement 16 restes possibles (les entiers successifs de 1 à 16). Donc, le $17^{ème}$ reste (qui se trouve dans la cellule A18 est nécessairement le même qu'un reste déjà obtenu).

4) On se propose maintenant de retrouver l'écriture fractionnaire du rationnel $a = 1,\overline{23}$ (c'est-à-dire le nombre dont l'écriture décimale périodique est 1,23232323232323…). Pour cela, calculer 100a – a et en déduire l'écriture de a sous forme fractionnaire.

$100a = 123,2323232323\ldots$(avec **une infinité** de 23)

$a = \quad 1,2323232323\ldots$(avec **une infinité** de 23)

On soustrait membre à membre et on trouve :

$$99a = 122 \text{ donc } a = \frac{122}{99}$$