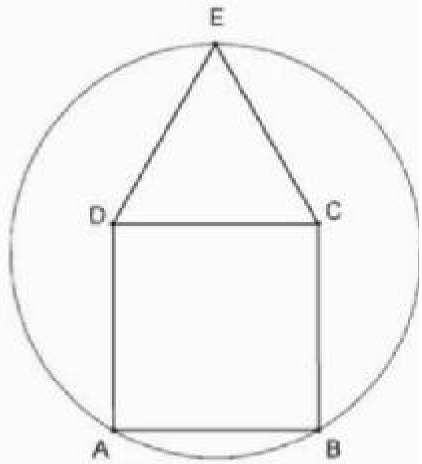
Exercices de géométrie plane

1°) Exercice 1

On considère la figure ci-contre constituée d'un cercle Γ passant par les sommets A et B d'un carré ABCD de côté a et par le sommet E d'un triangle équilatéral EDC extérieur au carré.
L'objectif de cet exercice est de déterminer le rayon et le centre O du cercle Γ.



1) Soit A' le point d'intersection, autre que A, du cercle et de la droite (AD). Démontrer que les points A', O et B sont alignés.

2) Soit Δ la médiatrice du segment [AB].
   a) Démontrer que le point E appartient à la droite Δ.
   b) Proposer une méthode de construction de la droite Δ utilisant uniquement la règle non graduée.
   c) Démontrer que le point O appartient à la droite Δ.
   d) Proposer une méthode de construction du point O utilisant uniquement la règle non graduée.

3) Quelle est la nature des triangles EDA et EOA ? En déduire que $\widehat{DAO} = 30°$.

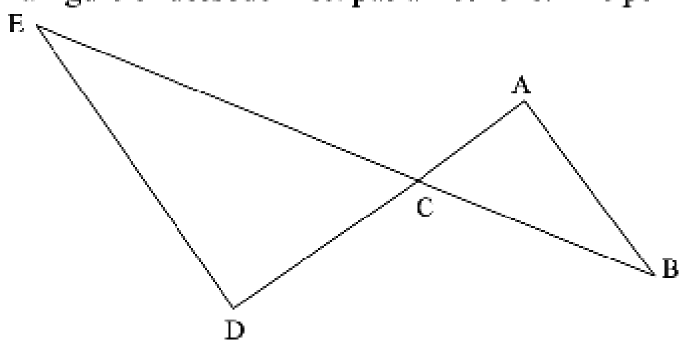
4) Quelle est la nature du triangle AOB ? En déduire la longueur du rayon du cercle.

2°) Exercice 2

On considère cinq points A, B, C, D et E tels que :

- Le triangle CAB est rectangle en A.
- Les points A, C, D sont alignés. AC = 3 cm ; AD = 8,4 cm.
- Les points B, C, E sont alignés. BC = 4,5 cm ; BE = 12,6 cm.

La figure ci-dessous n'est pas à l'échelle. Elle permet de situer les points.



1. a. Démontrer que les droites (AB) et (ED) sont parallèles.
   b. En déduire que les angles $\widehat{CED}$ et $\widehat{ABC}$ sont égaux.

2. a. Déterminer l'aire du triangle ABC. En donner son arrondi au cm^2 près.
   b. On admet que le triangle CED est un agrandissement du triangle ABC. En déduire, sans calculer la longueur ED, l'aire du triangle EDC.

3°) Exercice 3

Soit ABCD un quadrilatère quelconque dont les diagonales [AC] et [BD] se coupent en O.

Soit I le milieu de [AB], J le milieu de [BC], K le milieu de [CD] et L le milieu de [DA].

Etude du quadrilatère IJKL

1. a) Démontrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (AC).

   b) Démontrer que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.

2. Dans chaque cas, une ou plusieurs affirmations proposées sont exactes. Le candidat indiquera sur sa copie la référence de la question et la (ou les) lettre(s) correspondant à l'(ou aux) affirmation(s) qu'il estime exacte(s). Aucune justification n'est demandée.

   a) Si ABCD est un losange, alors IJKL est toujours :

A : un parallélogramme B : un losange C : un rectangle D : un carré.

   b) Si ABCD est un carré, alors IJKL est toujours :

A : un parallélogramme B : un losange C : un rectangle D : un carré.

3. Démontrer que si ABCD est un rectangle, alors IJKL est un losange.

Calculs d'aires

On suppose désormais que le quadrilatère ABCD est un carré (cf. figure 1).

Soit N le milieu de [IJ], P le milieu de [JK], Q le milieu de [KL], M le milieu de [LI].

Soit a l'aire du carré ABCD.

4. a) Démontrer que l'aire du quadrilatère IJKL est $\frac{a}{2}$.

   b) Exprimer l'aire du quadrilatère MNPQ en fonction de a.

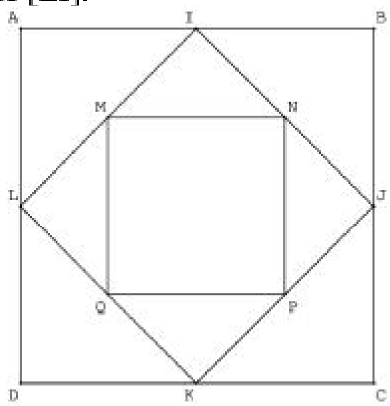


Figure 1

4°) Exercice 4

On considère le trapèze rectangle ABCD, de hauteur [AD] tel que AD = 8 cm et de bases [AB] et [CD] de longueurs respectives 4 cm et 10 cm.

1) Calculer l'aire du trapèze ABCD.

2) Donner, en justifiant, la nature du triangle BCD.

3) La hauteur issue de C dans le triangle BCD coupe la droite (AD) en K.
Montrer que les triangles KBC et KDC ont la même aire.

4) Soit M un point mobile sur le segment [AD].
On note x la mesure de la longueur AM, l'unité choisie étant le cm.
a) Donner, en fonction de x, l'aire du triangle BCM.
b) Pour quelle position de M, l'aire du triangle BCM est-elle la moitié de celle du trapèze ABCD ?

5°) Exercice

Pour l'ensemble des questions de cet exercice, **les traits de construction doivent rester apparents.**

1) Placer deux points A et C non situés sur les lignes de la copie. Ces deux points sont les sommets opposés d'un carré ABCD. Construire ce carré à la règle et au compas et justifier la construction en citant la ou les propriétés géométriques utilisées.

2) a) Construire un rectangle EFGH tel que la longueur du côté EF soit 7 cm et celle de la diagonale EG soit 9 cm. Justifier la construction en citant la ou les propriétés géométriques utilisées.

b) La construction d'un rectangle dont on impose la longueur d'un côté et celle de la diagonale est-elle toujours réalisable ? Justifier.

3) Construire deux rectangles IJKL et IMKN. Quelle est la nature du quadrilatère MJNL ? Justifier la réponse.