Concours blanc n° 2

Barème et proposition de corrigé (utilisant des corrigés réalisés par la COPIRELEM)

<u>EXERCICE 1 :</u> <u>7 points</u>

1ère partie

Question 1 : 0,5 pt

Question 2 : **4,5 pts** a) 1,5 pts

b) 1,5 pts (0,5 pour AC ; 0,5 pour MP en fonction de x ; 0,5 pour MN en fonction de x)

c) 1 pt (0,25 pour le graphe de f ; 0,5 pour le graphe de g ; 0,25 pour l'interprétation graphique)

d) 0,5 pt.

2ème partie

Question 1 : **1 pt**

Question 2 : 1 pt

<u>Exercice 2 :</u> <u>8 points</u>

Question 1 : 0,5 pt

Question 2 : **0,5 pt**

Question 3 : 0,5 pt

Question 4 : 0,5 pt

Question 5 : 1 pt

Question 6 : 1 pt

Question 7 : 1 pt : 0,5 + 0,5

Question 8 : 3 pts : 1) 0,5 pt ; 2) 1,5 pt 3) 1 pt.

<u>Exercice 3</u> <u>: 5 points</u>

Question 1 : 1,5 pts

Question 2 : a) b) d) : **0,5 pt par réponse**

c) e) : **1 pt par réponse**

EXERCICE 1

Partie A :

Question 1 :

Pour répondre à cette question, examinons le parallélisme des droites :
(PM)//(BD) et (MN)//(AC). La condition nécessaire et suffisante pour que l'angle $\widehat{PMN}$ soit droit est que les droites (AC) et (BD) soient perpendiculaires. La condition nécessaire et suffisante pour que les diagonales d'un rectangle soient perpendiculaires est que ce rectangle soit un carré. Donc pour que $\widehat{PMN}$ soit droit, il est nécessaire et suffisant que ABCD soit un carré. Or ce n'est pas le cas, donc PMN n'est pas droit.

Question 2 :

a)
En considérant à nouveau le parallélisme décrit en question 1, et en utilisant le théorème de Thalè appliqué aux triangles, nous pouvons écrire les égalités suivantes :

Concernant les triangles ABD et APM : $\frac{MP}{BD} = \frac{MA}{AB}$ (1).

Concernant les triangles ABC et BMN : $\frac{MN}{AC} = \frac{MB}{AB}$ (2).

Or AC = BD (diagonales d'un rectangle), donc (2) équivaut à : $\frac{MN}{BD} = \frac{MB}{AB}$(3).

D'après les égalités (1) et (3), si MP = MN alors $\frac{MN}{BD} = \frac{MA}{AB} = \frac{MB}{AB}$, d'où MA = MB.

M est alors milieu de [AB].

b)
D'après le théorème de Pythagore : $AB^2 + BC^2 = AC^2$

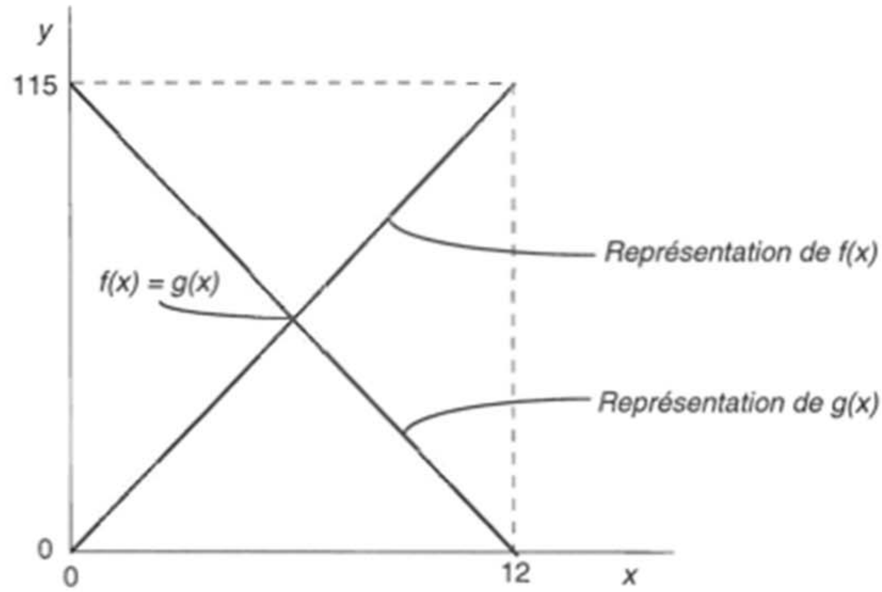
donc $AC^2 = 144 + 81 = 225$ alors AC = 15.

En utilisant (1), et en présentant une égalité issue du produit des extrêmes et des moyens, on obtient :

$MP \,.\, 12 = x \,.\, 15$, d'où $MP = \frac{15}{12}x$ $\quad$ $\mathbf{MP = \frac{5}{4}x.}$

De la même façon, à l'aide de (3) : $MN \,.\, 12 = 15 \,.\, (12-x)$ $\quad$ $\mathbf{MN = \frac{5}{4}(12-x)}$

c) représentation graphique :



Pour retrouver la réponse du 2a), il suffit d'interpréter l'égalité MP=MN : cela signifie qu'il peut ex
une valeur de x telle que f(x)=g(x) : pour x = 6, les graphes de f(x) et g(x) se coupent. Or, lorsque x
cela signifie que M est milieu de AB (AB=12 en cm).

d) MN = 2 MP revient à poser l'équation g(x) = 2 f(x)

Existe-t-il x dans l'intervalle [0 ;12] tel que $\frac{5}{4}(12\text{-}x) = \frac{10}{4}x$

$$\frac{5}{4}(12-x) = \frac{10}{4}x$$
$$\Leftrightarrow$$
$$60-5x = 10x$$
$$\Leftrightarrow$$
$$60 = 15\,x$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x = 4$$

Lorsque M est à 4 cm de A, alors la distance MN est le double de la distance MP.

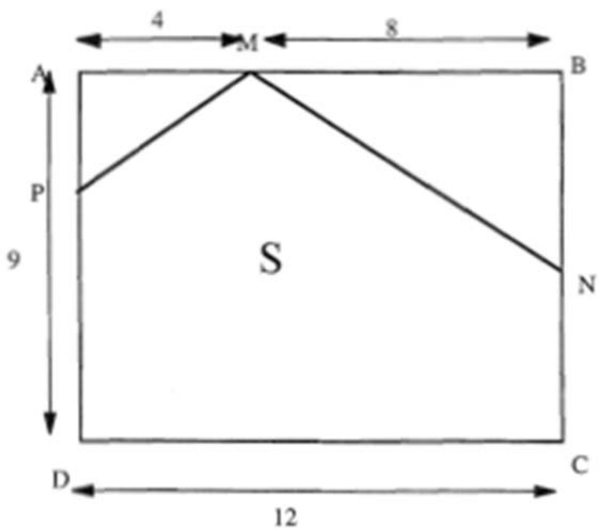
Partie B :

Question 1 :

Le calcul du volume de ce solide peut d'effectuer en utilisant la formule générale :

aire de base x hauteur

en prenant pour hauteur la distance entre les plans ABCD et EFGH, par exemple, AE, soit 20 cm.
Le calcul de l'aire de base peut se faire à partir du dessin suivant :



En reprenant le travail sur le parallélisme (cf question 2 a) et en utilisant le théorème de Thalès, on peut écrire les égalités suivantes : $\frac{BM}{BA}=\frac{BN}{BC}$ ainsi que $\frac{AM}{AB}=\frac{AP}{AD}$ ce qui permet d'obtenir : AP =

$\frac{36}{12}= 3$ et BN = $\frac{72}{12}=6$

Calculons l'aire de PMNCD par différence : aire PMNCD = aire ABCD - (aire AMP + aire MBN)

aire ABCD = 12 x 9 = 108

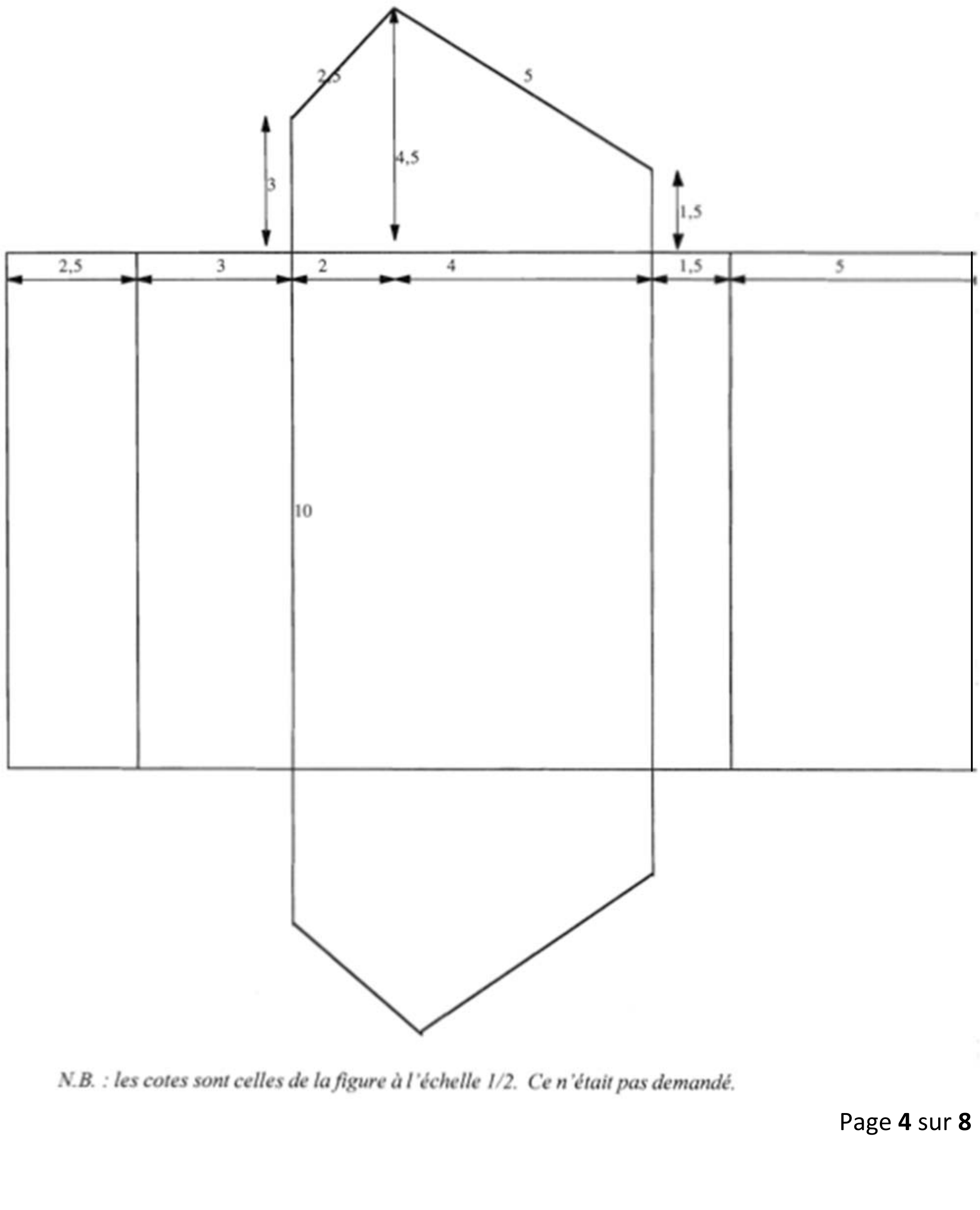
aire AMP = $\frac{1}{2}$ x 4 x 3= 6

aire MBN= $\frac{1}{2}$ x 8 x 6= 24

aire PMNCD = 108 - (6+24)=78

Le volume est alors : aire PMNCD x 20 = 78x20 = 1560 (en cm^3).

Question 2 :



N.B. : les cotes sont celles de la figure à l'échelle 1/2. Ce n'était pas demandé.

EXERCICE 2

Question 1) Un entier naturel à deux chiffres peut s'écrire " $a + 10b$ " où a est le chiffre des unités et b le chiffre des dizaines.
Si cet entier est égal au double de la somme de ses chiffres, nous avons: $a + 10b = 2(a+b)$
d'où $a+10b = 2a+2b$, d'où $8b=a$.
Or a et b sont au plus égaux à 9, et $b \neq 0$ (nombre à deux chiffres), donc la seule solution est $a=1$ et $b=8$.
<u>Le nombre 18 est le seul nombre qui répond à la question.</u>

Question 2) Si le nombre était égal à la somme de ses chiffres, on aurait:
$a+10b = a+b$ d'où $9b = 0$ d'où $b = 0$ impossible car le nombre a deux chiffres
<u>Il n'existe pas de nombre qui réponde à la question.</u>

Question 3) Si l'on effectue la division de 100 001 par 11, on constate que $100\,001 = 11 \times 9091 = 11k$ avec k nombre entier.
Donc <u>100 001 est un multiple de 11.</u>

- On peut aussi appliquer le caractère de divisibilité par 11 : somme des chiffres de rang pair : 1 somme des chiffres de rang impair : 1 différence : 1-1=0 ; 0 est multiple de 11 donc le nombre est multiple de 11.

Question 4) On cherche les diviseurs premiers de 1001 en examinant la liste des nombres premiers (2,3,5,7,11...) et en utilisant éventuellement les caractères de divisibilité .
1001 n'est pas divisible par 2 (dernier chiffre "1" non divisible par 2), ni par 3 (somme des chiffres "2" non divisible par 3) ni par 5 (dernier chiffre "1" différent de 0 ou 5).
La division par 7 donne: $1001 = 7 \times 143$ et la division de 143 par 11 (qui s'effectue mentalement) donne:
$143 = 11 \times 13$ d'où la décomposition:

$$\boxed{1001 = 7 \times 11 \times 13}$$

- on peut trouver aussi par des décompositions astucieuses de 1001. Exemple:
$1001 = 990+11 = 11 \times 90 + 11 = 11 \times (90+1) = 11 \times 91 = 11 \times 13 \times 7$

Question 5) $\dfrac{1001}{100001} = \dfrac{7 x 11 x 13}{11 x 9091} = \dfrac{7 x 13}{9091}$
Or 9091 n'est divisible ni par 7 ni par 13. En effet:

solution 1:	solution 2:
La division euclidienne de 9091 par 7 donne : $9091=1298\times7+5$ et celle de 9091 par 13 : $9091=699\times13+4$	En tapant sur la calculette $9091\div7$ nous obtenons 1298,7142 qui est une valeur approchée du quotient; ce quotient n'est donc pas un nombre entier; de même pour 9091 par 13(nous obtenons 699,30769)

La dernière fraction de l'écriture ci-dessus ne peut donc pas être simplifiée. D'où:

$$\boxed{\frac{1001}{100001}=\frac{91}{9091}}$$

* $\frac{2500025}{825}=\frac{25\times100001}{25\times33}=\frac{11\times9091}{33}=\frac{9091}{3}$ en simplifiant par 25, puis en utilisant la question 3), puis en simplifiant par 11.

Or 9091 n'est pas multiple de 3 (la somme de ses chiffres est 19, ce n'est pas un multiple de 3)

La dernière fraction est donc irréductible. D'où:

$$\boxed{\frac{2500025}{825}=\frac{9091}{3}}$$

Question 6) Un nombre de la forme donnée peut s'écrire:
$a+10c+100c+1000b+10000b+100000a= 100001a+11000b+110c$
$= 11\times9091a + 11\times1000b + 11\times10c = 11\ (9091a +1000b+10c) = 11\times K$ K entier
Donc le nombre proposé est bien un multiple de 11.
On peut aussi utiliser le critère de divisibilité par 11: la somme des chiffres de rang pair est a+c+b; la somme des chiffres de rang impair est c+b+a; la différence est nulle , donc multiple de 11. Donc le nombre est multiple de 11.

Question 7) Un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
Donc le nombre donné est divisible par 9 si et seulement si : a+b+b+c+c+a est divisible par 9
soit : 2(a+b+c) divisible par 9;
comme 2 et 9 sont premiers entre eux, cela équivaut à : (a+b+c) divisible par 9.
Les nombres a,b,c sont au plus égaux à 9, et ne sont pas nuls.
Donc les seules valeurs possibles pour a+b+c sont 9 ; 18 et 27

Le nombre 788 337 est bien de la forme précédente avec a=7 ; b=8 et c=3 ; donc, d'après la question 6), il est divisible par 11.
D'autre part, dans ce cas, a+b+c=18, donc d'après ce qui précède, il est aussi divisible par 9.
Or 9 et 11 sont premiers entre eux, donc il est divisible par leur produit.
Donc 788 337 est divisible par 99.

Question 8-1) $14= 2\times7$ $21= 3\times7$ $42= 2\times3\times7$ le PGCD de ces nombres est donc 7.

Question 8-2) si 7 est un diviseur commun à $\overline{ab}$ et $\overline{bc}$, nous avons: $\overline{ab}$= 7xk et $\overline{bc}$=7xm avec k et m entiers.

D'où 10a+b=7k (1) et 10b+c=7m (2)

$\overline{ca}$ = 10c+a et d'après (2),

10c = 70m-100b d'où en reportant dans $\overline{ca}$, on a $\overline{ca}$ = 70m-100b+a.

D'après (1) 100b = 700k - 1000a d'où en reportant dans $\overline{ca}$ $\overline{ca}$ = 70m-700k+1000a+a

d'où $\overline{ca}$ = 7x10m - 7x100k + 1001a= 7x10m - 7x100k + 7x143a = 7 (10m-100k+143a) = 7×h avec h entier.

Donc $\overline{ca}$ <u>est bien divisible par 7.</u>

= $\overline{ab}$x10000 + $\overline{bc}$x100 + $\overline{ca}$

Si $\overline{ab}$ et $\overline{bc}$ sont divisibles par 7, $\overline{ab}$x10000 et $\overline{bc}$x100 sont aussi divisibles par 7,

d'autre part, d'après ce qui précède, $\overline{ca}$ est aussi divisible par 7.

$\overline{abbcca}$ est une somme de nombres divisibles par 7, il est donc divisible par 7.

<u>$\overline{abbcca}$ est donc aussi divisible par 7</u>

Question 8-3) Nous dressons d'abord la liste des multiples de 7 s'écrivant avec deux chiffres (excepté 70 car a, b et c sont non nuls) : 14; 21; 28; 35 etc. jusqu'à 98.

Pour chaque nombre $\overline{ab}$ de la liste , nous cherchons le ou les nombres $\overline{bc}$ en déterminant c pour que $\overline{bc}$ soit un multiple de 7; le nombre $\overline{ca}$ s'en déduit aussitôt.

Exemple pour $\overline{ab}$ = 14; on cherche le ou les multiples de 7 commençant par 4; on trouve soit $\overline{bc}$=42 soit $\overline{bc}$=49 ; et par conséquent soit $\overline{ca}$= 21 soit $\overline{ca}$ = 91.

D'où la liste:

144221 / 144991 211442 288442 355663 422114 / 422884
499114 / 499884 566335

633556 777777 844228 / 844998 911449 988449.

D'après la question 8-2) tous ces nombres sont divisibles par 7.

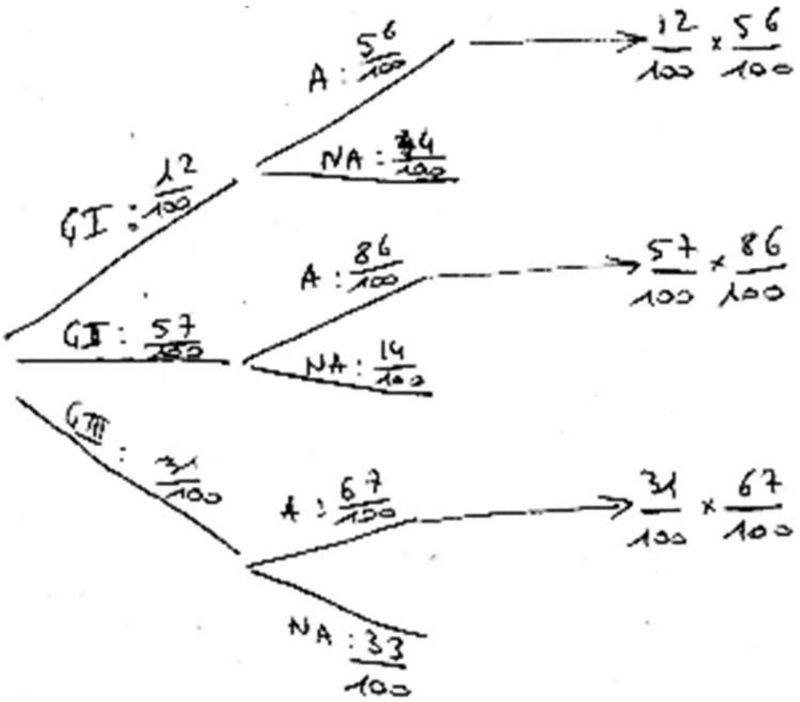
D'après la question 6) ils sont tous divisibles par 11.

7 et 11 étant premiers entre eux, tous ces nombres sont donc divisibles par le produit 7x11.

Donc <u>tous les nombres de la liste ci-dessus sont divisibles par 77.</u>

Exercice 3 :

1) On peut réaliser l'arbre de choix pondéré suivant, puis additionner les probabilités des « branches favorables » :



On obtient : P = $\frac{12}{100}\times\frac{56}{100}+\frac{57}{100}\times\frac{86}{100}+\frac{31}{100}\times\frac{67}{100}=\frac{672+4902+2077}{10000}=\frac{7651}{10000}=76{,}51\%.$

2) a) $p(A)=\left(\frac{1}{6}\right)^4$

b) $p(B)=\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{5}{18}$

c) $p(C)=1-p(B)$ car B est l'événement contraire de C. D'où $p(C)=1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$.

d) $p(P)=\frac{1}{2}$.

e) $p(E)=p(\overline{P})\times p(B)=(1-p(P))\times p(B)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{18}=\frac{5}{36}$