Fonctions numériques
Proportionnalité

I Fonctions numériques

1°) Définition et notations

Définir une fonction f qui à x associe y c'est donner une formule mathématique qui permet pour toute valeur donnée de x soit de dire que y n'existe pas (dans ce cas la valeur de x n'appartient pas au domaine de définition de f) soit de déterminer y de façon unique.

Exemple : soit f la fonction qui à x associe y valant $\frac{1}{x^2-4}$

Notations possibles :

f : $3 \longrightarrow 0{,}2$ ou f(3) = 0,2 (on dit que 0,2 est l'image de 3 et on dit que 3 est **un** antécédent de 0,2)

Pour cette fonction f(-2) et f(2) n'existent pas.

Remarque : Une fonction peut être définie par plusieurs formules mathématiques à condition que soit clairement précisée quelle formule on doit employer selon l'intervalle auquel appartient la valeur de x (on parle alors de fonction définie par morceaux).

Exemple : Un représentant reçoit mensuellement un fixe de 800 € et une commission égale à 10% des ventes réalisées à condition que celles-ci dépassent 3000 €. Si on note x le montant en € des ventes mensuelles réalisées par le représentant et y la valeur en € de son salaire alors y est fonction de x et on a :

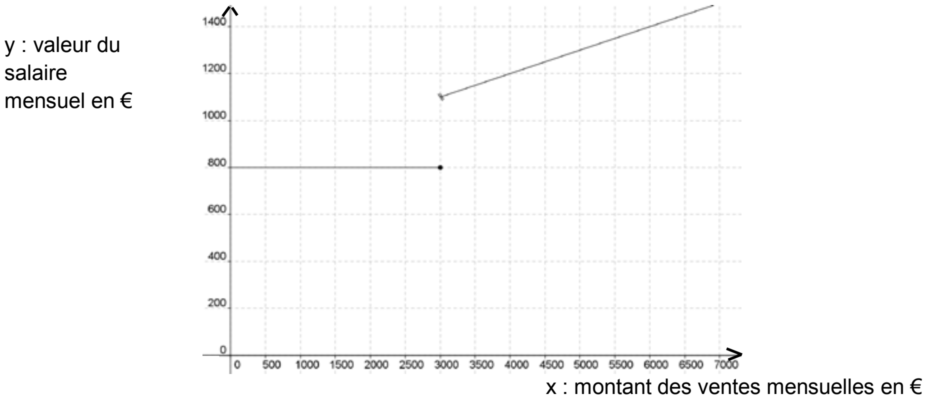
$$\begin{cases} \text{si } x \leq 3000 \text{ alors } y = 800 \\ \text{si } x > 3000 \text{ alors } y = 0{,}1x + 800 \end{cases}$$

2°) Représentation graphique d'une fonction

Soit une fonction qui à x associe y. A chaque valeur de x pour laquelle y existe on peut faire correspondre un point d'abscisse x et d'ordonnée y dans un repère bien choisi (se donner un repère c'est se donner deux axes gradués). L'ensemble de tous les points obtenus s'appelle la représentation graphique de la fonction.

<u>Exemple :</u>

Reprenons l'exemple précédent. La représentation de la fonction qui à x associe y est :

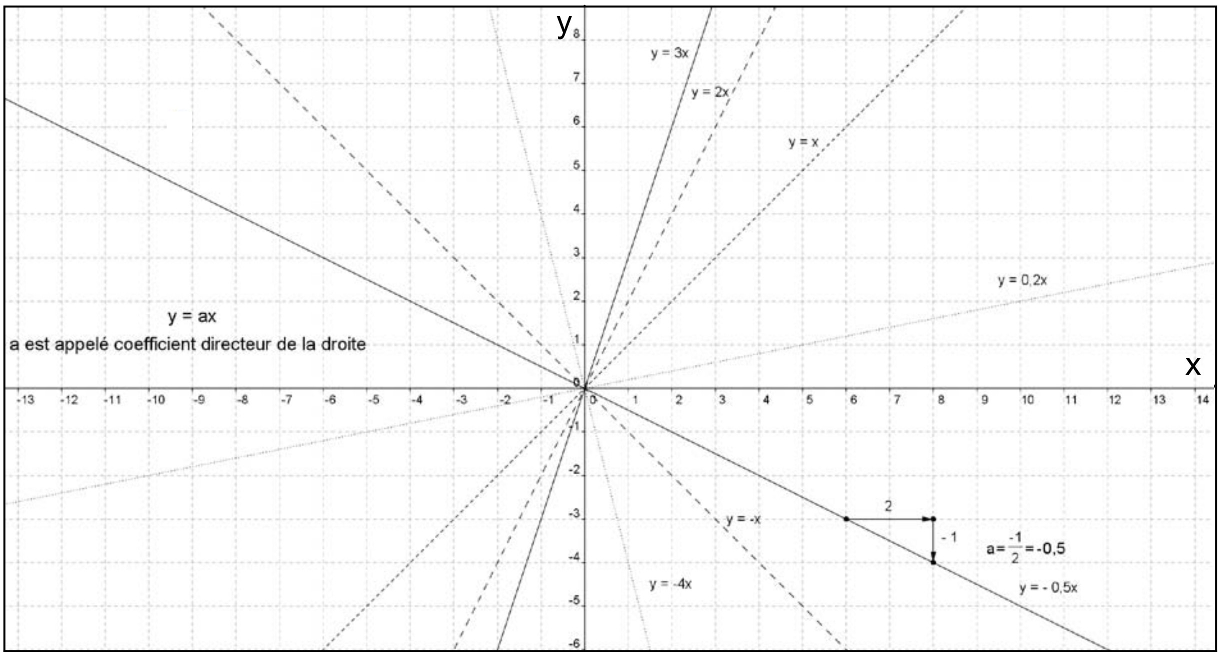


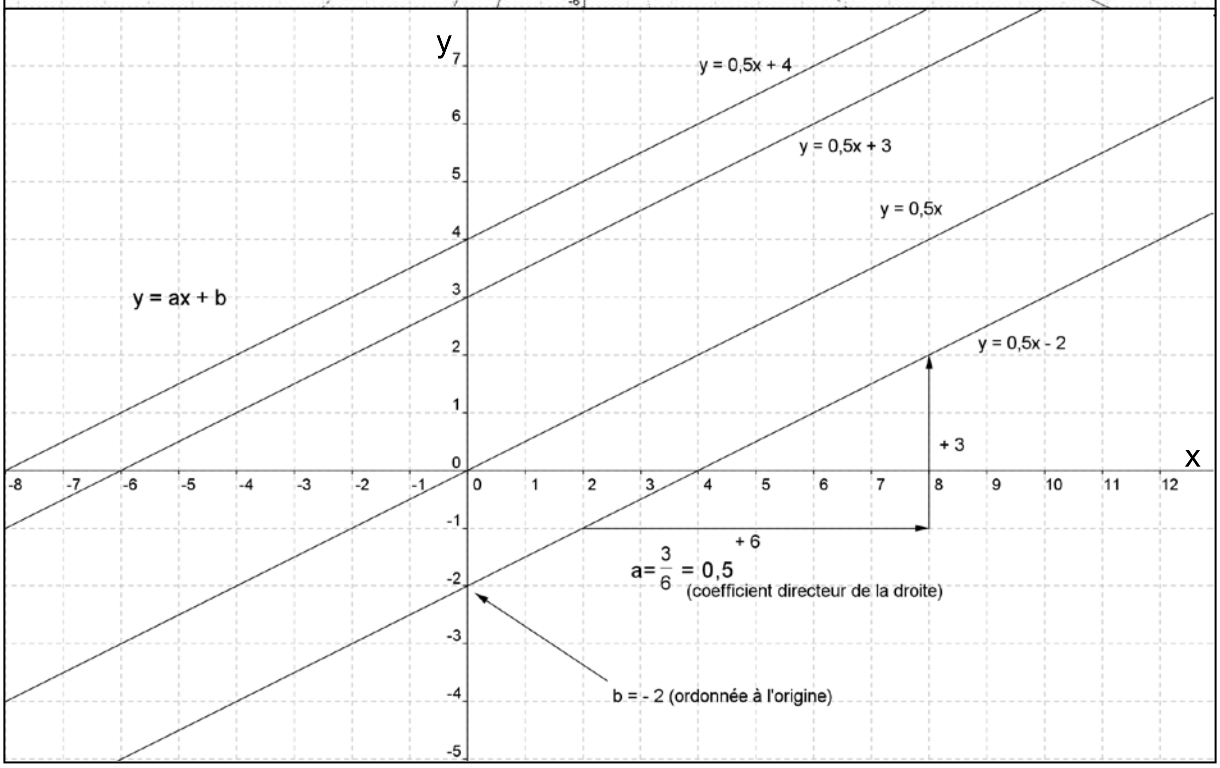
3°) Cas particuliers qu'il faut bien connaître (fonction linéaires et fonctions affines)

a) Si y = ax alors la fonction qui à x associe y est appelée fonction linéaire et sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère. C'est un type de fonction particulièrement important car on verra plus loin que ceci correspond au cas où deux grandeurs sont proportionnelles.

b) Si y = ax+b alors la fonction qui à x associe y est appelée fonction affine et sa représentation graphique est une droite.
Remarque : Si b = 0 on retrouve y = ax donc les fonctions linéaires sont des cas particuliers de fonctions affines.

c) Représentations graphiques des fonctions linéaires et des fonctions affines:





II Proportionnalité

1°) Remarque préalable

La notion de proportionnalité peut être introduite en utilisant des suites (on définit ce que sont deux suites de nombres proportionnelles) ou en utilisant des tableaux (on définit ce qu'est un tableau de proportionnalité) ou en utilisant des grandeurs (on définit ce que sont deux grandeurs proportionnelles). Dans le cadre de ce cours, on choisit, d'utiliser des grandeurs.

2°) Définition

On note x la mesure d'une première grandeur et y la mesure d'une deuxième grandeur.

On dit que la deuxième grandeur est proportionnelle à la première s'il existe une fonction linéaire f (donc une fonction du type $x \rightarrow ax$) qui permet de passer de la mesure x de la première grandeur à la mesure y de la deuxième grandeur. Dans ce cas on dit que a est le coefficient de propotionnalité.

Exemple concernant un achat de pommes :

« Poids » des pommes en kg	3	5	8	16
Prix des pommes en €	4,5	7,5	12	24

×1,5

Si on appelle x le « poids » des pommes en kg et y le prix des pommes en €, on a (dans cet exemple où on suppose que le prix est uniforme c'est-à-dire qu'il n'y a pas, par exemple, de réduction pour un achat important) : y = 1,5 x

Dans cet exemple, le prix des pommes est proportionnel au « poids » des pommes.
Remarque : Le coefficient de proportionnalité 1,5 est ici le prix unitaire (en €/kg).

3°) Propriétés

Exemple de grandeurs proportionnelles : Le salaire (si on est payé à l'heure) est proportionnel à la durée du travail.

Exemples de grandeurs non proportionnelles : Le "poids" d'un individu donné n'est pas proportionnel à sa taille

Propriété n°1

x	Durée du travail (en heures)	4	12
y	Salaire (en euro)	32	96

× 8

8 (€ / h) est le coefficient de proportionnalité

Remarque : la fonction qui à x associe y est la fonction linéaire $x \longrightarrow 8x$

Age (en années)	2	6
"Poids" (en kilogrammes)	8	10

~~×~~

Propriété n°2 :

×3

Durée du travail (en heures)	4	12
Salaire (en euro)	32	96

×3

Il s'agit de la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre :
$f(kx) = kf(x)$

×3

Age (en années)	2	6
"Poids" (en kilogrammes)	8	10

~~×3~~

Propriété n°3 :

+

Durée du travail (en heures)	4	12	16
Salaire (en euro)	32	96	128

+

Il s'agit de la propriété de linéarité pour l'addition :
$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

+

Age (en années)	2	8	10
"Poids" (en kilogrammes)	8	10	16

~~+~~

Propriété n° 4 :

Si on fait un graphique les points sont tous sur une même droite passant par l'origine.

Si on fait un graphique les points ne sont pas tous sur une même droite passant par l'origine.

Remarques:

a) On peut écrire :

Si je travaille 4 heures, je gagne 32 €

:4

Si je travaille 1 heure, je gagne 32 : 4 = 8 €

×5

Si je travaille 5 heures, je gagne 5 × 8 = 40 €

b) On peut utiliser un "automatisme"appelé "produit en croix" qu'il ne semble pas souhaitable d'enseigner à l'école primaire :

4	5
32	?

4 x ? = 5 x 32

a) ~~Si j'ai 2 ans, je pèse 8 kg~~

~~Si j'ai 1 an, je pèse 8 : 2 = 4 kg~~

b) On ne peut pas utiliser le "produit en croix".

Pour la notion de "règle de trois" voir page suivante.

Remarques concernant l'expression « règle de trois »

La signification précise de l'expression « règle de trois » peut varier d'un auteur à l'autre mais, dans tous les cas, ce qui est sous-jacent c'est la procédure de « passage par l'unité » suivante :
.

4 pommes coûtent 2 €.

1 pomme coûte 4 fois moins donc coûte $\frac{2}{4}$ €.

5 pommes coûtent 5 fois plus donc coûtent $\frac{2}{4}\times 5$ €.

On appelle assez souvent, me semble-t-il, « règle de trois » le fait de produire rapidement le résultat final $\frac{2}{4}\times 5$€ sans nécessairement écrire des explications.

Mais cette procédure peut garder du sens si on produit ce résultat de la manière suivante :

On pense et/ou on dit : « 4 pommes coûtent 2 € ».

On écrit le nombre 2.

On pense et/ou on dit : « 1 pomme coûte 4 fois moins ».

On complète ce qu'on a commencé d'écrire : $\frac{2}{4}$.

On pense et/ou on dit : « 5 pommes coûtent 5 fois plus ».

On complète ce qu'on a commencé d'écrire : $\frac{2}{4}\times 5$ €

4°) Pourcentages

a) Pourcentages pour décrire une situation (exemples) :

Premier exemple : dans une classe de 32 élèves il y a 12,5 % de filles.

Nombre de filles : $32 \times \dfrac{12,5}{100} = 4$

Deuxième exemple : dans une classe de 32 élèves il y a 8 filles.

Première présentation possible des calculs :

Pourcentage de filles : $\dfrac{8}{32} = 0,25 = 25\%$

Deuxième présentation possible des calculs :

Pourcentage de filles : $\dfrac{8}{32} \times 100\ \% = 0,25 \times 100\% = 25\ \%$

Troisième exemple :

On étudie la taille t des élèves d'une classe. On trouve :

Tailles en cm	$100 < t \leq 110$	$110 < t \leq 120$	$120 < t \leq 130$
Effectifs	5	7	8

Tailles en cm	$100 < t \leq 110$	$110 < t \leq 120$	$120 < t \leq 130$	Total
Effectifs	5	7	8	20
Fréquences	$\frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0,25 = \frac{25}{100}$	$\frac{7}{20} = 0,35 = \frac{35}{100}$	$\frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0,40 = \frac{40}{100}$	$\frac{20}{20} = 1$
Pourcentages (en %)	25	35	40	100
Angles au centre pour un diagramme circulaire (en °)	90	126	144	360

$\times 0,5$

$\times 5$

$\times 18$

b) Pourcentages pour décrire une évolution :

- **Si des prix augmentent de t%, les nouveaux prix sont proportionnels aux anciens et le coefficient de proportionnalité est égal à $1 + \dfrac{t}{100}$**

Exemple : un objet qui coûtait 32 € va coûter après augmentation de 25 %

$32 \times (1 + \dfrac{25}{100})$ € soit 32 × 1,25 € soit 40 €.

(attention : **on a multiplié l'ancien prix par 1,25 pour trouver directement le nouveau prix** mais si on avait voulu calculer l'augmentation on aurait multiplié l'ancien prix par 0,25)

¨ **Si des prix diminuent de t%, les nouveaux prix sont proportionnels aux anciens et le coefficient de proportionnalité est égal à** $1 - \frac{t}{100}$

Exemple : un objet qui coûtait 32 € va coûter après diminution de 25 %

$32 \times (1 - \frac{25}{100})$ € soit 32 × 0,75 € soit 24 €.

(attention : **on a multiplié l'ancien prix par 0,75 pour trouver le nouveau prix** mais si on veut calculer seulement l'augmentation on multiplie l'ancien prix par **0,25**)

¨ On peut aussi retenir les formules suivantes :

Si une quantité est multiplié par c avec c > 1, cette quantité augmente de (c - 1) × 100%

Si une quantité est multiplié par c avec c < 1, cette quantité diminue de (1 - c) × 100%

¨ Pour trouver un pourcentage d'augmentation ou de diminution, on peut présenter les calculs ainsi :

Un prix passe de 130 à 133,38 €.

$\frac{133,38}{130}$ = 1,026 donc le prix est multiplié par 1,026 donc le prix augmente de (1,026 - 1) × 100 % donc le prix augmente de 2,6 %.

Un prix passe de 140 à 139,16 €.

$\frac{139,16}{140}$ = 0,994 donc le prix est multiplié par 0,994 donc le prix diminue de (1 - 0,994) × 100 % donc le prix diminue de 0,6 %.

Remarque : dans les deux cas, on a calculé $\frac{\text{nouvelle valeur}}{\text{ancienne valeur}}$.

5°) Echelles et proportionnalité

Echelle : $\frac{1}{50\ 000}$

La distance sur le terrain est proportionnelle à la distance sur la carte.

Distance sur la carte en cm	3	10
Distance sur le terrain en cm	150 000	500 000

(on passe de la première ligne à la deuxième en multipliant par 50 000)

Distance sur la carte en cm	3	10
Distance sur le terrain en km	1,5	5

(on passe de la première ligne à la deuxième en multipliant par 0,5)

6°) Vitesse et proportionnalité

La distance parcourue est proportionnelle à la durée du parcours si la vitesse est constante (la vitesse est alors le coefficient de proportionnalité).

Exemple avec v = 60 km/h :

Durée du parcours en h	1	2	2,5	4
Distance parcourue en km	60	120	150	240

(on passe de la première ligne à la deuxième en multipliant par 60)

7°) Compléments concernant les registres utilisés pour parler de la proportionnalité