Corrigés des exercices de dénombrement

Exercice 1

1°) a)Nombre de résultats possibles : $6 \times 6 \times 6 = 216$

6	6	6
Nombre de résultats possibles au premier lancer.	Nombre de résultats possibles au deuxième lancer.	Nombre de résultats possibles au troisième lancer.

b) $5 \times 5 \times 5 = 125$

5	5	5
Nombre de résultats possibles au premier lancer.	Nombre de résultats possibles au deuxième lancer.	Nombre de résultats possibles au troisième lancer.

c) Première méthode :
Nombre de résultats avec un seul chiffre 4 : $1\times5\times5 + 5\times1\times5 + 5\times5\times1 = 75$
Nombre de résultats avec deux chiffres 4 : $1\times1\times5 + 1\times5\times1 + 5\times1\times1 = 15$
Nombre de résultats avec trois chiffres 4 : $1\times1\times1 = 1$
Total : 91
Deuxième méthode (plus astucieuse) : on utilise les résultats des questions 1 et 2
216 - 125 = 91

2°) a) $32 \times 32 \times 32 = 32\,768$

b) Nombre de résultats avec trois trèfles : $8\times8\times8 = 512$
Nombre de résultats avec trois cœurs : $8\times8\times8 = 512$
Nombre de résultats avec trois carreaux : $8\times8\times8 = 512$
Nombre de résultats avec trois piques : $8\times8\times8 = 512$
Total : $4\times512 = 2048$

3°) a) $32 \times 31 \times 30 = 29\,760$

b) Nombre de résultats avec trois trèfles : $8\times7\times6 = 336$
Nombre de résultats avec trois cœurs : $8\times7\times6 = 336$
Nombre de résultats avec trois carreaux : $8\times7\times6 = 336$
Nombre de résultats avec trois piques : $8\times7\times6 = 336$
Total : $4\times336 = 1344$

4°) a) C'est le nombre de combinaisons de quatre éléments pris dans un ensemble de 32 éléments. On trouve donc $\frac{32\times31\times30\times29}{4\times3\times2\times1}$ (voir formules de dénombrement) résultats possibles soit 35960 résultats possibles.

b) Nombre de résultats avec quatre trèfles : $\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = 70$

Nombre de résultats avec quatre cœurs : $\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = 70$

Nombre de résultats avec quatre carreaux : $\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = 70$

Nombre de résultats avec quatre piques : $\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$

Total : 4×70 = 280

Exercice 2

1) Dans ce cas, chacune des bandes peut être des 4 couleurs quelles que soient les couleurs des 2 autres. Ainsi pour chaque couleur de la première bande, il y a 4 couleurs possibles pour la deuxième, ce qui fait donc pour les deux premières 4 x 4 solutions distinctes ; et pour chacune de 4 x 4 solutions il y a encore 4 coloriages possibles pour la troisième bande, d'où (4 x 4) x 4 solutions. Cela donne donc 4 x 4 x 4 = 64 On a donc **64** possibilités.

2) Dans ce cas, les deux autres bandes peuvent être chacune des 4 couleurs, ce qui donne 4 x 4 = 16. On a donc **16** possibilités.

3) Il suffit de raisonner en imaginant déjà colorée la bande centrale. Pour chacune des couleurs possibles pour la bande centrale, il reste la possibilité de choisir 3 couleurs pour la bande supérieure aussi bien que pour la bande inférieure. Donc pour chacune des 4 couleurs possibles pour la bande centrale, il y a 3 x 3 possibilités de choisir les couleurs des deux autres. Donc au total cela donne : 4 x 3 x 3 = 36 On a donc **36** possibilités.

4) Il y a quatre choix de couleur pour colorier la première bande. Il reste 3 choix pour la deuxième et donc 2 choix pour la dernière bande. Ainsi, il y a 4 x 3 x 2 = **24** possibilités.

5) Il y a quatre choix de couleur pour la première bande. Ce qui fixe la couleur de la troisième bande (par symétrie). Il reste donc 4 choix pour la bande centrale. Ainsi, il y a 4 x 4 = **16** possibilités.

Exercice 3

Pour les pages de 1 à 9 : 9 chiffres
Pour les pages de 10 à 99 : 90 × 2 soit 180 chiffres
Pour les pages de 100 à 350 : 251 x 3 soit 753 chiffres

Total : 942 chiffres

Remarque :

Quand on écrit tous les nombres entiers consécutifs en commençant au nombre n et en s'arrêtant au nombre p, on obtient p - n + 1 nombres.

Exercice 4

1) Les multiples de 21 ayant trois chiffres sont les nombres qui vérifient :

$100 \leq k \times 21 \leq 999$ avec k entier

k doit vérifier $\frac{100}{21} \leq k \leq \frac{999}{21}$. Or $\frac{100}{21} \approx 4{,}76$ et $\frac{999}{21} \approx 47{,}6$

On en déduit que k prend tous les valeurs entières de 5 à 47.

Ce qui représente : 47 - 5 + 1 soit 43 possibilités (rappel : si n et p sont des entiers avec p > n, il y a p - n + 1 nombres entiers de p à n, p et n étant inclus).

On utilise donc 3 × 43 soit **129 caractères** (car il faut trois caractères par multiple).

2) Les multiples de 21 ayant cinq chiffres sont les nombres qui vérifient :

$10\,000 \leq k \times 21 \leq 99\,999$ avec k entier

k doit vérifier $\frac{10\,000}{21} \leq k \leq \frac{99\,999}{21}$. Or $\frac{10\,000}{21} \approx 476{,}19$ et $\frac{99\,999}{21} \approx 4\,761{,}86$

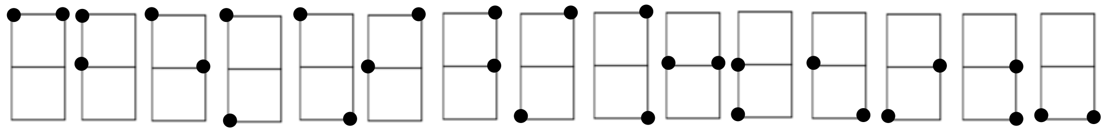
On en déduit que k prend tous les valeurs entières de 477 à 4 761.

Ce qui représente : 4 761 - 477 + 1 soit 4 285 possibilités.

On utilise donc 5 × 4 285 soit **21 425 caractères** (car il faut cinq caractères par multiple).

Exercice 5

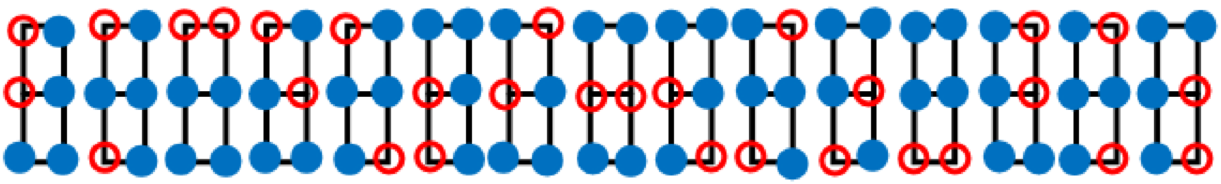
1°) Il s’agit de choisir un sous-ensemble de 2 nœuds dans un ensemble de 6 nœuds. Il y a donc $\frac{6\times5}{2\times1}$ caractères possibles soit 15 caractères possibles (voir formules de dénombrement).

2°) 

3°)

Première méthode :
Il s’agit de choisir un sous-ensemble de 4 nœuds dans un ensemble de 6 nœuds. Il y a donc $\frac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1}$ caractères possibles soit 15 caractères possibles (voir formules de dénombrement).

Deuxième méthode :
Il y a autant de caractères avec 4 points que de caractères avec 2 points car chacun des caractères avec 4 points correspond à un caractère avec 2 points :



Exercice 6

1°) Il y a $\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}$ soit 84 tirages possibles (voir formules de dénombrement).

2°) Parmi ces tirages, 8 tirages sont tels que la somme des nombres marqués sur les jetons tirés soit égale à 15. il s’agit des tirages suivants :

{1,5,9}, {1,6,8}, {2,4,9}, {2,5,8}, {2,6,7}, {3,7,5}, {3,8,4}, {4,5,6}

Exercice 7

1°) De AA-001-AA à AA-999-AZ, il y a 26 groupes de lettres du deuxième bloc possibles et pour chacun de ces groupes il y 999 véhicules immatriculés ce qui représente un total de 26 × 999 véhicules soit **25 974 véhicules**.

D. Pernoux
Sites personnels et blog : http://dpernoux.net

2°) De AA-001-AA à AA-999-AZ, il y a 25 974 véhicules
De AA-001-BA à AA-999-BA, il y a 999 véhicules
De AA-001-BB à AA-999-BB, il y a 999 véhicules
De AA-001-BC à AA-999-BC, il y a 999 véhicules
De AA-001-BD à AA-011-BD, il y a 11 véhicules

Pour atteindre le numéro AA-011-BD, il faut donc immatriculer 25 974 + 3×999 + 11 véhicules soit **28 982 véhicules.**

3°) De AA-001-AA à AA-999-AZ (numéro d'immatriculation qui vient juste avant AB-00-AA), il y a 999 véhicules immatriculés pour chaque groupe de lettre du troisième bloc possibles. Or, il y a 26 × 26 soit 676 manières différentes de choisir le groupe de lettres du troisième bloc. On a donc au total 676×999 soit **675 324 véhicules**.

4°) Pour chaque groupe de lettres du premier bloc possible il y a 675 324 véhicules immatriculés (voir 3°). Or il y a 26 × 26 soit 676 manières différentes de choisir le groupe de lettres du premier bloc. On a donc la possibilité d'immatriculer 676 × 675 324 véhicules au total soit **456 519 024** véhicules.

A raison de 7 millions de véhicules par an, le système pourrait être épuisé au bout de $\frac{456\,519\,024}{7\,000\,000}$ années soit **un peu plus de 65 années**.