Corrigés des exercices d'arithmétique (diviseurs, multiples, PGCD, PPCM,…)

Exercice 1

Soit un nombre entier à trois chiffres $\overline{cdu}$

$$\overline{cdu} = 100c + 10d + u = 99c + c + 9d + d + u = 99c + 9d + c + d + u = \underbrace{3 \times (33c + 3d)}_{\text{multiple de 3}} + c + d + u$$

Donc $\overline{cdu}$ est divisible par 3 lorsque c + d + u est divisible par 3.
On a donc bien démontré qu'un nombre entier à trois chiffres est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Exercice 2

1°) $60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$

Donc le nombre de diviseurs de 60 est égal à (2+1)×(1+1)×(1+1) soit 12.

2°) Liste des diviseurs de 60 : 1 2 3 4 5 6 10 12 15 20 30 60

3°) $70 = 2^1 \times 5^1 \times 7^1$

Donc le nombre de diviseurs de 70 est égal à (1+1)×(1+1)×(1+1) soit 8.

4°) Liste des diviseurs de 70 : 1 2 5 7 10 14 35 70

5°) En comparant les deux listes précédentes, on voit que le PGCD de 60 et 70 est égal à 10.

Autre méthode : On utilise les décompositions en produits de nombres premiers de 60 et 70 et on trouve que $PGCD(60,70) = 2 \times 5 = 10$.

6°) $PPCM(60,70) = \dfrac{60 \times 70}{PGCD(60,70)} = \dfrac{4200}{10} = 420$

Autre méthode : On utilise les décompositions en produits de nombres premiers de 60 et 70 et on trouve que $PPCM(60,70) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$.

Exercice 3

Les voitures se retrouvent ensemble sur la ligne de départ si la mesure en minutes de la durée depuis le départ est un multiple de 30 et 36. PPCM(30 , 36) = 180

Les voitures se trouvent ensemble sur la ligne de départ toutes les 3 heures.

Moments	Nombre de tours parcourus par la voiture A	Nombre de tours parcourus par la voiture B
Lundi 14h	0	0
Lundi 17h	5	6
Lundi 20h	10	12
Lundi 23h	15	18
Mardi 2h	20	24
Mardi 5h	25	30
Mardi 8h	30	36
Mardi 11h	35	42
Mardi 14h	40	48

Exercice 4

a - 1 doit être un multiple commun à 9 et 12.

PPCM(9 , 12) = 36

a - 1 doit donc être un multiple de 36 (inférieur à 149 car a est inférieur à 150).

D'où les valeurs possibles pour a - 1 : 36, 72, 108 et 144.

Et pour a : **37, 73, 109, 145.**

Exercice 5

1°) a) On utilise le nombre maximal de dalles quand les dalles ont des côtés mesurant 1cm. On utilise alors 455 × 385 dalles soit **175 175 dalles**.

b) 385 = 5 × 7 × 11 et 455 = 5 × 7 x 13
PGCD (385,455) = 35

La plus grande dalle qu'on peut utiliser a donc des côtés qui mesurent **35 cm**.
On utilise alors $\frac{455}{35} \times \frac{385}{35}$ dalles soit 13 × 11 dalles soit **143 dalles**.

2°) La surface carrée doit avoir des côtés mesurant un nombre de centimètres qui soit un multiple de 15 et 24.

PPCM(15 , 24) = 120

Donc la surface carrée doit avoir des côtés mesurant un nombre de centimètres qui soit un multiple de 120 cm.

Comme l'aire de la surface carrée doit être inférieure ou égale à 36 m², on garde les solutions suivantes :

Mesure du côté de la surface carrée : 1,2 m. (Aire de la surface carrée : 1,44 m²)
Mesure du côté de la surface carrée : 2,4 m. (Aire de la surface carrée : 5,76 m²)
Mesure du côté de la surface carrée : 3,6 m. (Aire de la surface carrée : 12,96 m²)
Mesure du côté de la surface carrée : 4,8 m. (Aire de la surface carrée : 23,04 m²)
Mesure du côté de la surface carrée : 6 m. (Aire de la surface carrée : 36 m²)

Exercice 6

Soit n le nombre de bouquets.

n doit être un diviseur commun à 90, 120 et 135

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$
$120 = 2^3 \times 3 \times 5$
$135 = 3^3 \times 5$

PGCD (90 , 120 , 135) = 15

Si on veut que n soit maximum il faut prendre n = 15.

Composition des bouquets à choisir :

Nombre de roses blanches : $\frac{135}{15}$ soit **9 roses blanches.**

Nombre de roses rouges : $\frac{120}{15}$ soit **8 roses rouges**.

Nombre de roses jaunes : $\frac{90}{15}$ soit **6 roses jaunes.**

Exercice 7

1°) Le nombre d'arbustes est maximum lorsque la mesure de la distance en mètres entre deux arbustes est égal à 1m. Pour trouver le nombre d'arbustes on peut chercher le nombre d'intervalles entre deux arbustes car il y a autant d'arbustes que d'intervalles. Le nombre maximum d'arbustes est donc égal à $\frac{2\times(728+924)}{1} = 3304$.

1°) La mesure en mètres de la distance entre deux arbustes doit être un diviseur commun à 728 et 924 et doit être la plus grande possible (car on cherche le nombre minimum d'arbustes). La mesure en mètres de la distance entre deux arbustes doit donc être le PGCD de 728 et 924.

$728 = 2^3 \times 7 \times 13$
$924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$
$PGCD(728, 924) = 2^2 \times 7 = 28$

La distance entre deux arbustes doit être égal à 28m.
Pour trouver le nombre d'arbustes on peut chercher le nombre d'intervalles entre deux arbustes car il y a autant d'arbustes que d'intervalles.
Le nombre minimum d'arbustes cherché est donc égal à $\frac{2\times(728+924)}{28} = 118$.