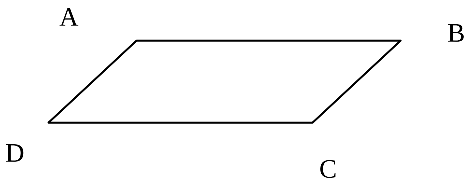
Figures géométriques élémentaires

1°) Remarque préalable

Considérons les affirmations suivantes :



P1 : $(AB)\parallel(DC)$ et $(AD)\parallel(BC)$
P2 : $(AB)\parallel(DC)$ et AB = DC
P3 : AB = DC et AD = BC
P4 : [AC] et [BD] ont même milieu

On démontre que chacune de ces affirmations, prise isolément, est équivalente à l'affirmation P suivante : le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Bien comprendre ce que ceci signifie : dire que l'affirmation P3 est équivalente à l'affirmation « le quadrilatère ABCD est un parallélogramme » c'est, non seulement, dire, que, pour tout parallélogramme, les côtés opposés ont même longueur deux à deux mais c'est aussi dire que tout quadrilatère qui a des côtés opposés de même longueur deux à deux est un parallélogramme.

Bâtir une démonstration va consister à enchaîner des propriétés :
si, à un certain moment, on sait, par exemple, que P3 est vérifiée (autrement dit si on sait que AB = DC et AD = BC), on pourra en déduire que ABCD est un parallélogramme. A l'étape suivante, on pourra en déduire que P1, par exemple, est vérifiée, autrement dit que $(AB)\parallel(DC)$ et $(AD)\parallel(BC)$.

La démonstration aura donc consisté à enchaîner deux théorèmes :

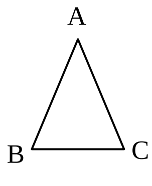
Premier théorème (P3 $\Rightarrow$ P) : si un quadrilatère a des côtés opposés de même longueur deux à deux, alors c'est un parallélogramme.
Deuxième théorème (P $\Rightarrow$ P1) : si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

<u>Il est donc important de connaître pour diverses figures élémentaires une liste de propositions équivalentes.</u>

2°) Listes de propositions équivalentes

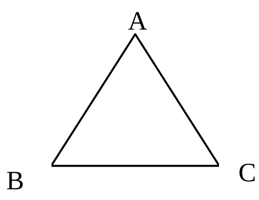
a) Liste de propositions équivalentes à la proposition TI : « Le triangle ABC est isocèle de sommet A »

TI1 : AB = AC
TI2 : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

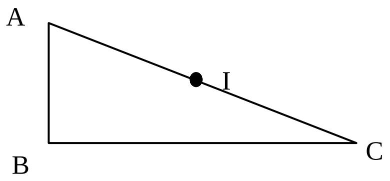


b) Liste de propositions équivalentes à la proposition TE : « Le triangle ABC est équilatéral »

TE1 : AB = AC = BC
TE2 : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{BAC}$
TE3 : $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 60°$



c) Liste de propositions équivalentes à la proposition TR : « Le triangle ABC est un triangle rectangle en B »

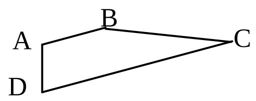


TR1 : $\widehat{ABC} = 90°$
TR2 : $AC^2 = AB^2 + BC^2$
TR3 : I est le milieu de [AC] et IA = IB = IC

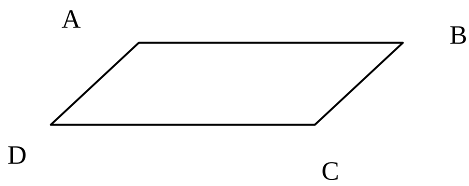
Remarques :
Le théorème « TR $\Rightarrow$ TR2 » est le théorème de Pythagore qui s'énonce ainsi : si ABC est un triangle rectangel en B, alors $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
Le théorème « TR2 $\Rightarrow$ TR » est le théorème réciproque du théorème de Pythagore qui s'énonce ainsi : si $AC^2 = AB^2 + BC^2$ alors le triangle ABC est un triangle rectnagle en B.
Le théorème « TR $\Rightarrow$ TR3 » est un théorème qui s'énonce ainsi : si un triangle ABC est rectangle en B alors le cercle de diamètre [AC] passe par B.
Le théorème « TR3 $\Rightarrow$ TR » est un théorème qui s'énonce ainsi : si [AC] est un diamètre d'un cercle et B un point de ce cercle alors le triangle ABC est rectangle en B

d) Proposition équivalente à la proposition T : « Le quadrilatère ABCD est un trapèze »

T1 : $(AB) /\!/ (DC)$

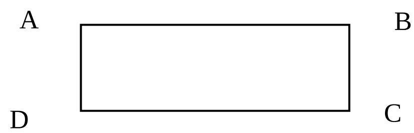


e) Liste de propositions équivalentes à la proposition P : « Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme »



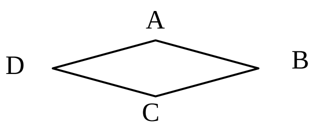
P1 : $(AB) /\!/ (DC)$ et $(AD) /\!/ (BC)$
P2 : $(AB) /\!/ (DC)$ et AB = DC
P3 : AB = DC et AD = BC
P4 : [AC] et [BD] ont même milieu

f) Liste de propositions équivalentes à la proposition R : « Le quadrilatère ABCD est un rectangle »



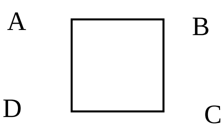
R1 : Les angles de ABCD sont des angles droits
R1 : ABCD est un parallélogramme et $\widehat{ADC} = 90°$
R2 : ABCD est un parallélogramme et AC = DB

g) Liste de propositions équivalentes à la proposition L : « Le quadrilatère ABCD est un losange »



L1 : AB = BC = CD = DA
L2 : ABCD est un parallélogramme et $(AC) \perp (DB)$

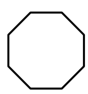
h) Liste de propositions équivalentes à la proposition C : «Le quadrilatère ABCD est un carré»



C1 : ABCD est un rectangle et ABCD est un losange
C2 : AB = BC = CD = DA et BAD = 90°

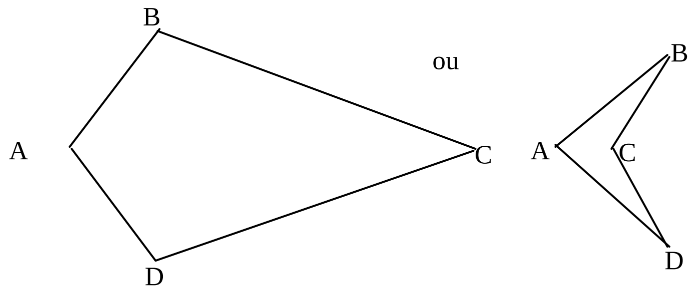
i) Liste de propositions équivalentes à la proposition PR : « Le polygône P est un polygône régulier »

PR1 : Tous les côtés de P ont même longueur et tous ses angles sont égaux



PR2 : P est inscriptible dans un cercle et tous les angles au centre déterminés par les segments joignant le centre du cercle à deux sommets succesifs sont égaux.

j) Liste de propositions équivalentes à la proposition CV : « Le quadrilatère ABCD est un cerf-volant »

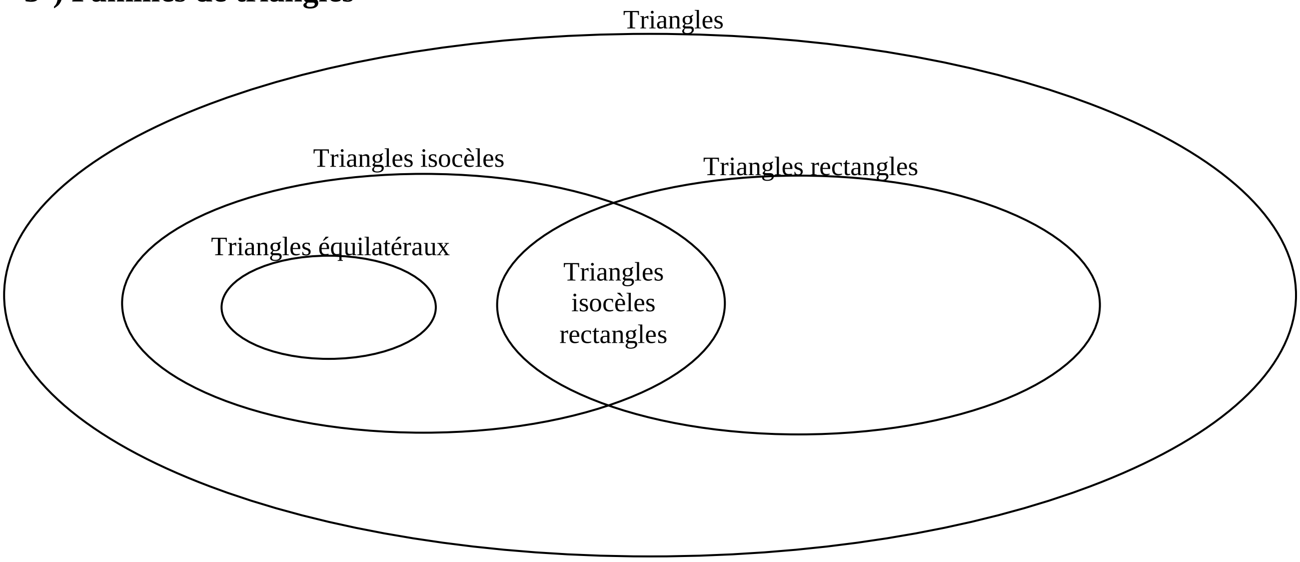


CV1 : (AC) est un axe de symétrie du quadrilatère ABCD
CV2 : AB = AD et BC = DC

k) Proposition équivalente à la proposiiton CE : « La figure F est un cercle »

CE1 : F est constitué de l'ensemble des points M vérifiant OM = r où O est un point donné et où r un nombre positif donné.

3°) Familles de triangles



3°) Familles de quadrilatères