Corrigés des exercices sur les calculs et les opérations

1°) Exercice 1

$$\begin{array}{r} 4\ 8 \\ \times\ \ 1\ 3 \\ \hline 1\ 4\ 4 \\ 4\ 8\ 0 \\ \hline 6\ 2\ 4 \end{array}$$

48 × 13 = 624

480 × 13 = (10 × 48) × 13 = 10 × (48 x 13) = 10 × 624 = 6 240

associativité de la multiplication

480 × 26 = 480 × (13 × 2) = (480 × 13) × 2 = 6 240 × 2 = 12 480

associativité de la multiplication

13 × 148 = 13 × (100 + 48) = 13 × 100 + 13 × 48 = 1 300 + 13 × 48 = 1 300 + 48 × 13

distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

commutativité de la multiplication

= 1 300 + 624 = 1 924

1 048 × 13 = (1 000 + 48) × 13 = 1 000 × 13 + 48 × 13 = 13 000 + 624 = 13 624

distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

(13 × 89) - (13 × 41) = 13 × (89 - 41) = 13 × 48 = 48 × 13 = 624

distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction

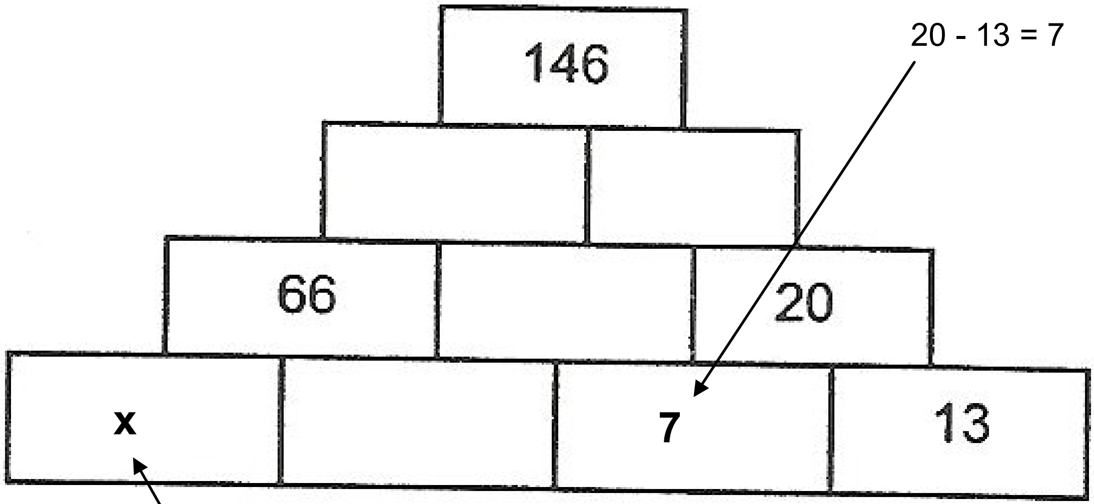
commutativité de la multiplication

D. Pernoux
Sites personnels et blog : http://dpernoux.net

2°) Exercice 2

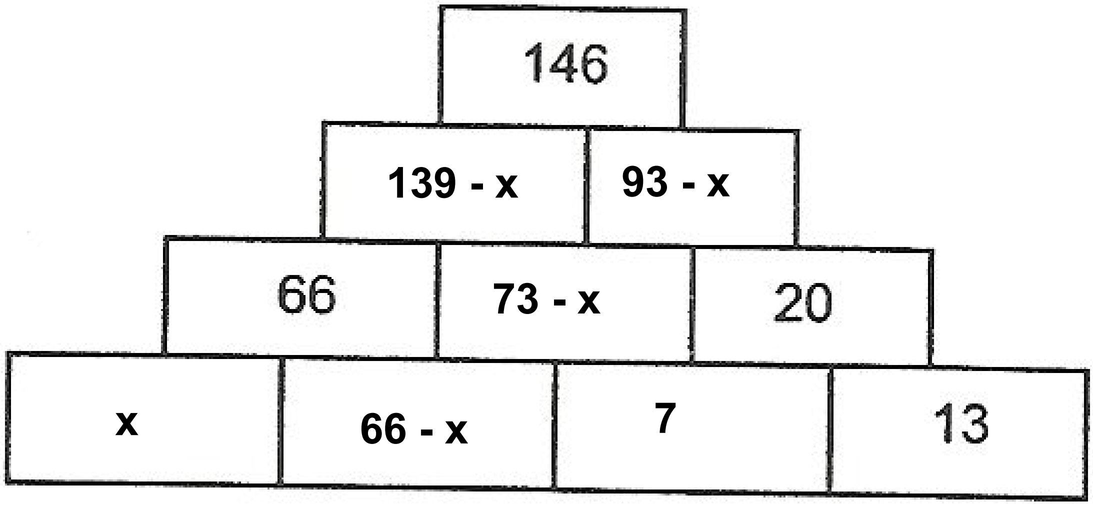
a) On trouve d'abord le nombre 7 :

20 - 13 = 7



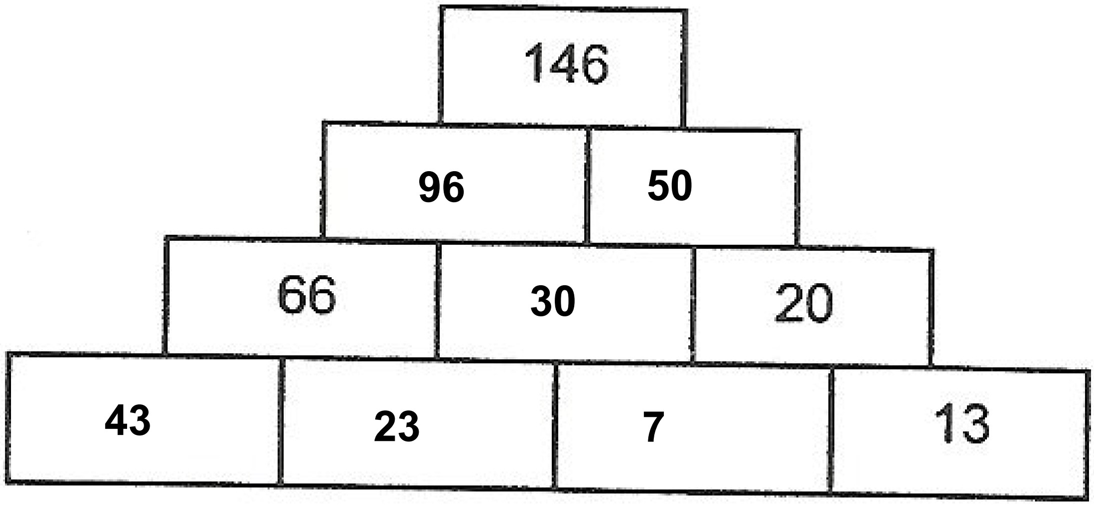
b) On appelle x ce nombre inconnu.

c) On en déduit :



d) On résout l'équation : (139 - x) + (93 - x) = 146 soit 86 = 2x soit x = 43

e) On conclut :



3°) Exercice 3

1°) Si, le coup suivant, B dit : « 7 + 1 = 8 », A pourra dire ensuite : « 8 + 2 = 10 » et gagner la partie.

Si, le coup suivant, B dit : « 7 + 2 = 9 », A pourra dire ensuite : « 9 + 1 = 10 » et gagner la partie.

A a donc raison de dire : « J'ai gagné ! ».

2°) On a vu a la question précédente qu'un joueur qui arrive à un total de 7 est assuré de pouvoir gagner (il lui suffit de choisir ensuite le complément à 3 du nombre choisi par son adversaire).

De la même manière on peut expliquer qu'un joueur qui arrive à un total de 4 est assuré de pouvoir gagner puisqu'il pourra ensuite arriver à 7 en employant toujours la même tactique (choisir le complément à 3 du nombre choisi par son adversaire).

Si je joueur B commence en disant : « 1 », il est assuré de pouvoir gagner puisqu'il pourra ensuite arriver à 4 puis à 7 puis à 10 en choisissant à chaque fois le complément à 3 du nombre choisi par son adversaire.

Il existe donc bien un nombre permettant au joueur B d'être aussi affirmatif. C'est le nombre 1.

3°) Pour pouvoir être assuré de gagner il faut, dans « la course à 10 par pas de 3 », pouvoir arriver à un total de 6 (ensuite on choisit le complément à 4 du nombre choisi par l'adversaire).

Or, pour être sûr de pouvoir arriver à 6, il suffit, si on est le joueur qui commence la partie d'annoncer : « 2 » (on emploie ensuite la même tactique : choisir le complément à 4 du nombre choisi par l'adversaire).

Donc, **si le joueur qui commence annonce : « 2 », il est sûr de pouvoir gagner** (il suffit de choisir ensuite à chaque fois le complément à 4 du nombre choisi par son adversaire).

4°) Dans « la course à 12 par pas de 3 », des raisonnements analogues à ceux-ci-dessus permettent d'affirmer que, si on arrive à un total de 4, on est sûr de pouvoir gagner (en effet, en choisissant ensuite à chaque fois le complément à 4 du nombre choisi par son adversaire on arrive à 8 puis à 12).

Si B commence en disant « 1 », A pourra dire « 1 + 3 = 4 ».

Si B commence en disant « 2 », A pourra dire « 2 + 2 = 4 ».

Si B commence en disant « 3 », A pourra dire « 3 + 1 = 4 »

Quel que soit le nombre annoncé par B au départ, A pourra donc arriver à un total de 4, puis un total de 8 puis un total de 12 (en choisissant à chaque fois le complément à 4 du nombre choisi par son adversaire).

A met donc toutes les chances de son côté pour gagner.

5°)

Dans la «course à n par pas de 3 », on est sûr de pouvoir gagner si on peut commencer en annonçant un nombre qui soit de la forme n - 4k (avec k entier) (ensuite, on choisit à chaque fois le complément à 4 du nombre choisi par l'adversaire).

Il faut donc que l'un des nombres 1, 2 et 3 figure parmi les nombres de la forme n - 4k.

C'est le cas lorsque n peut être écrit 4k + 1 ou 4k + 2 ou 4k + 3 (avec k entier) ce qui revient à dire que n n'est pas un multiple de 4.

Si le nombre n n'est pas un multiple de 4, le joueur qui commence a la certitude de gagner s'il joue bien.

4°) Exercice 4

a) On sait que $n = 3q + 1$
On en déduit que $n - 1 = 3q$. **Le reste de la division euclidienne par 3 de l'entier précédent n est donc égal à 0.**

$n + 1 = 3q + 2$ et on a bien $0 \leq 2 < 3$ **donc le reste dans la division euclidienne par 3 de l'entier suivant n est égal à 2.**

b) La somme de trois entiers naturels consécutifs peut toujours être écrite $(n - 1) + n + (n+1)$ où n est un entier naturel. **Cette somme vaut donc 3n et est donc divisible par 3.**

c) La somme des carrés de trois entiers naturels consécutifs peut toujours être écrite $(n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2$ où n est un entier naturel. Cette somme est égale à $n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1$ soit $3n^2 + 2$ qui est du genre $3q + r$ avec $0 \leq r < 3$.
Donc, **quand on effectue la division euclidienne par 3 de la somme des carrés de trois entiers naturels consécutifs, le reste est toujours égal à 2.**

5°) Exercice 5

a) $13 = 11 \times 1 + 2$ avec $0 \leq 2 < 11$ donc le reste de la division de 13 par 11 vaut 2.
$34 = 11 \times 3 + 1$ avec $0 \leq 1 < 11$ donc le reste de la division de 34 par 11 vaut 1.
$13 + 34 = 47$ et $47 = 11 \times 4 + 3$ avec $0 \leq 3 < 11$ donc **le reste de la division de 13 + 34 par 11** vaut 3 et **est bien égal à la somme des restes des divisions de 13 par 11 et de 34 par 11.**

b) $17 = 11 \times 1 + 6$ avec $0 \leq 6 < 11$ donc le reste de la division de 17 par 11 vaut 6.
$19 = 11 \times 1 + 8$ avec $0 \leq 8 < 11$ donc le reste de la division de 19 par 11 vaut 8.
$17 + 19 = 36$ et $36 = 11 \times 3 + 3$ avec $0 \leq 3 < 11$ donc **le reste de la division de 17 + 19 par 11** vaut 3 et **n'est donc pas égal à la somme des restes des divisions de 13 par 11 et de 34 par 11.**

c)

On sait que $a = 11q + r$ avec $0 \leq r < 11$ et que $a' = 11\,q' + r'$ avec $0 \leq r' < 11$.
On en déduit que $a + a' = 11\,(q + q') + r + r'$.

Premier cas : $0 \leq r + r' < 11$
Si $0 \leq r + r' < 11$, le reste de la division euclidienne de a + a' par 11 vaut $r + r'$.

Deuxième cas : $r + r' \geq 11$.
On peut écrire : $a + a' = 11\,(q + q') + r + r' = 11\,(q + q') + 11 - 11 + r + r'$
$= 11\,(q + q' + 1) + r + r' - 11$.

Or on sait que $r + r' \geq 11$ donc $r + r' - 11 \geq 0$.

Par ailleurs, on sait que $r < 11$ et $r' < 11$ donc $r + r' < 22$ donc $r + r' - 11 < 11$.

On a donc $a + a' = 11\,Q + R$ avec $0 \leq R < 11$ (si on pose $q + q' + 1 = Q$ et $r + r' - 11 = R$).
Si $r + r' \geq 11$, **le reste de la division euclidienne de a + a' par 11 vaut** donc **$r + r' - 11$.**

6°) Exercice 6

$$\sqrt{2} + 3\sqrt{8} - 6\sqrt{50} = \sqrt{2} + 3\sqrt{4 \times 2} - 6\sqrt{25 \times 2} = \sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 30\sqrt{2} = -23\sqrt{2}$$

$$\frac{2\sqrt{21}\sqrt{75}}{\sqrt{35}\sqrt{20}} = \frac{2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{7} \times 5 \times \sqrt{3}}{\sqrt{5} \times \sqrt{7} \times 2 \times \sqrt{5}} = 3$$

$$5\sqrt{12} + 6\sqrt{3} - \sqrt{300} = 5 \times 2 \times \sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$